VI Международная конференция по математическому моделированию

6th International Conference on Mathematical Modeling

3-8 Июля, 2011 / July 3-8, 2011
Якутск, Россия / Yakutsk, Russia

Тезисы докладов / Abstracts

РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РФФИ

Министерство науки и профессионального образования
Республики Саха (Якутия)

North-Eastern Federal University named after M.K.Ammosov
Research Institute for Mathematics of the YSU
Sobolev Institute of Mathematics
Lavrentiev Institute of Hydrodinamics
Novosibirsk State University

6th INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL MODELING

Abstracts

July' 3 – 8, 2011

Yakutsk, 2011

Северо-Восточный федеральный
университет имени М.К. Аммосова
НИИ математики при ЯГУ
Институт математики имени
С.Л. Соболева СО РАН
Институт гидродинамики имени
М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирский государственный университет

VI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Тезисы докладов

3 – 8 июля 2011 г.

Якутск, 2011

VI Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. / Под редакцией И.Е. Егорова., В.И. Васильева – Якутск: ОАО «Медиа-холдинг Якутия», 2011. – 224 с.

Ответственный за выпуск
д.ф.-м.н. *Федоров Ф.М.*

В сборник включены тезисы докладов, представленных на VI Международную конференцию по математическому моделированию.

Доклады участников конференции посвящены актуальным вопросам математического моделирования. Представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов.

Конференция организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-06041-г) и Министерством науки и профессионального образования РС(Я).

© Северо-Восточный федеральный университет,
ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», 2011

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

ON CONVERGENT EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF THE LINEARIZED ELASTICITY EQUATION NEAR SINGULAR POINTS

Itou H.

Gunma University, Japan
h-itou@gunma-u.ac.jp

In this talk we introduce some convergent expansion formulae of solutions of two dimensional linearized elasticity equation (called Navier's equation) around singular points such as a corner and a crack tip in the following cases.

ref.	singular point	material	boundary condi.
1.	a linear crack tip	homogeneous, isotropic	traction-free
2.	a linear crack tip	homogeneous, anisotropic	traction-free
3.	a corner	homogeneous, isotropic	traction-free
4.	a tip of a linear interfacial crack	two dissimilar homogeneous and isotropic media	non-penetration, Coulomb's friction

Some expansions themselves in the above cases may be well known, however, the explicit formulae with rigorous convergent proof seem to remain as open problems. The precise and detailed results have possibility of application in Fracture problems, Inverse problems (nondestructive evaluation) and so on. The derivation of formulae are based on complex analysis, especially, analytic continuation, Goursat-Kolosov-Muskhelishvili stress function, Lekhnitskii formalism, Riemann-Hilbert problem, etc. in cases 1, 2, and 4, and Mellin transform in case 3.

REFERENCES

1. *Ikehata M., Itou H.* Reconstruction of a linear crack in an isotropic elastic body from a single set of measured data // Inverse Problems, 2007. V. 23. P. 589–607.
2. *Ikehata M., Itou H.* An inverse problem for a linear crack in an anisotropic elastic body and the enclosure method // Inverse Problems, 2008. V. 24, 025005. P. 21.
3. *Ikehata M., Itou H.* Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data // Inverse Problems, 2009. V. 25. 105005. P. 21.

4. *Itou H., Kovtunenko V. A., Tani A.* The interface crack with Coulomb friction between two bonded dissimilar elastic media // Applications of Mathematics, 2011. V. 56. P. 69–97.

ACOUSTICS IN ENERGY, CLIMATE CHANGE AND BIO-MOLECULAR SIMULATIONS

Karabasov S. A.

Department of Engineering, University of Cambridge, United Kingdom
sak36@eng.cam.ac.uk

The multi-scale problems encountered in the area of acoustics in aerospace require a special set of mathematical modelling tools. The latter include accurate flow decomposition methods, e.g., based on acoustic analogy, as well as high-resolution computational schemes. Applications for such tools range from transonic helicopter noise to turbulent jet noise. The special acoustic techniques that we have developed over the years are not only applicable to the investigation of complex jet engine installation effects that are becoming increasingly relevant for a modern aircraft but also to thermo-hydraulic problems in nuclear engineering. Moreover, we show that the same high-resolution methods can be efficiently adapted for ocean modelling and, in future, extended to high-resolution General Circulation Models (GCMs) used in climate predictions. Finally, we will discuss the extension of ideas of small scale-large scale flow decomposition gained from acoustics to hybrid hydrodynamics/molecular dynamics modelling of large bio-molecular systems in water.

ON THE MECHANISMS OF LATE 20th CENTURY SEA-SURFACE TEMPERATURE TRENDS IN THE SOUTHERN OCEAN

Kravtsov S.[1], **Kamenkovich I.**[2], **Andrew McC. Hogg**[3], **J.M. Peters**

[1] *University of Wisconsin-Milwaukee, United Kingdom*
[1] kravtsov@uwm.edu
[2] *RSMAS/MPO, University of Miami, Coral Gables, USA*
[3] *Research School of Earth Sciences, Australian National University*

The Southern Ocean plays an important — arguably defining — role in the climate of the Earth. The dynamics of the Southern Ocean centrally involve interactions of global-scale currents with smaller-scale oceanic turbulence; the latter interaction is under-resolved in the state-of-the-art climate models used to diagnose the effects of global warming. Notwithstanding this deficiency, examination of the Southern Ocean's virtual climates simulated by such models shows sea-surface temperature (SST) trends that match well the observed late 20th century trends, despite apparent mismatches with the observed surface-wind changes. Motivated by recent theories of the Southern Ocean response to global warming, we used two idealized process models to assess contributions of various dynamical processes to the SST evolution in the region. In particular, a turbulence-resolving model exhibits a striking and counterintuitive effect of multi-scale interactions on the Southern Ocean climate change. We show that these effects can be efficiently parameterized via state-dependent surface diffusivity in a coarse-resolution hybrid coupled model that mimics the set up of global climate models.

CENTRAL SCHEMES: A POWERFUL BLACK-BOX-SOLVER FOR NONLINEAR HYPERBOLIC PDEs

Kurganov A.

Tulane University, New Orleans, USA and University of Mainz, Germany
kurganov@math.tulane.edu

I will first give a brief description of finite-volume, Godunov-type methods for hyperbolic systems of conservation laws. These methods consist

of two types of schemes: upwind and central. My lecture will focus on the second type – non-oscillatory central schemes. Godunov-type schemes are projection-evolution methods. In these methods, the solution, at each time step, is interpolated by a (discontinuous) piecewise polynomial interpolant, which is then evolved to the next time level using the integral form of conservation laws. Therefore, in order to design an upwind scheme, (generalized) Riemann problems have to be (approximately) solved at each cell interface. This however may be hard r even impossible. The main idea in the derivation of central schemes is to avoid solving Riemann problems by averaging over the wave fans generated at cell interfaces. This strategy leads to a family of universal numerical methods that can be applied as a black-box-solver to a wide variety of hyperbolic PDEs and related problems. At the same time, central schemes suffer from (relatively) high numerical viscosity, which can be reduced by incorporating of some upwinding information into the scheme derivation – this leads to central-upwind schemes, which will be presented in the lecture. During the talk, I will show a number of recent applications of the central schemes [4,5,6].

REFERENCES

1. *Kurganov A., Tadmor E.* New high resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys, 2000. №160. P. 241–282.
2. *Kurganov A., Noelle S., Petrova G.* Semi-discrete central-upwind scheme for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations // SIAM J. Sci. Comput., 2001. №23. P. 707–740.
3. *Kurganov A., Lin C.-T.* On the reduction of numerical dissipation in centralupwind schemes // Commun. Comput. Phys., 2007. №2. P. 141–163.
4. *Kurganov A., Petrova G.* A second-order well-balanced positivity preserving scheme for the Saint-Venant system // Commun. Math. Sci., 2007. №5. P. 133–160.
5. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // SIAM J. Sci. Comput., 2009. №31. P. 1742–1773.
6. *Kurganov A., Pollack M.* Semi-discrete central-upwind schemes for elasticity in heterogeneous media // submitted to SIAM J. Sci. Comput.

СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРА ПЕРЕХОДА

SPLITTING SCHEME ON BASIS OF TRANSITION OPERATOR APPROXIMATION

Вабищевич П. Н.

Институт проблем безопасностного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия

vab@ibrae.ac.ru

При приближенном решении нестационарных задач для уравнений с частными производными исследование устойчивости обычно проводиться на основе использования канонической формы операторно-разностных схем. Вторая возможность, традиционно широко используемая при анализе методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, связана с оценкой нормы оператора перехода с текущего временного слоя на новый.

В работе обсуждаются вопросы устойчивости операторно-разностных схем для модельного дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Основное внимание уделяется проблемам построения аддитивных схем (схем расщепления) на основе аппроксимаций оператора перехода. В частности, классические факторизованные схемы, схемы покомпонентного расщепления и регуляризованные операторно-разностные схемы связываются с использованием того или иного мультипликативного оператора перехода.

Аддитивно-усредненные операторнно-разностные схемы базируется на аддитивном представлении оператора перехода. Обсуждаются возможности построения схем расщепления второго порядка по времени, строятся неоднородные аддитивные операторно-разностные схемы, в которых для отдельных операторов расщепления используются различные типы операторов перехода.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ В СИСТЕМАХ ОТКРЫТЫХ РУСЕЛ И ВОДОЕМОВ[1]

MATHEMATICAL MODELS FOR COMPUTING OF INSTEADY FLOWING IN OPEN RIVERBEDS AND POND SYSTEMS

Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.

Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева
Новосибирск, Россия
voevodin@hydro.nsc.ru

Гидравлическая система, состоящая из открытых русел и слабопроточных водоемов, рассматривается как динамическая система с сосредоточенными и распределенными параметрами. Элементами системы являются входные и выходные сечения, узлы слияния водотоков, открытые русла и водотоки. В качестве основных параметров, описывающих состояние элементов системы, рассматриваются гидродинамические характеристики потоков: уровень свободной поверхности, расход воды и скорость потока. Для расчета гидродинамических параметров привлекаются уравнения гидродинамики, осредненные по ширине русла для глубоких водотоков и по поперечному сечению для речных русел. Во входных и выходных сечениях формулируются граничные условия, в узлах слияния - условия сопряжения.

Численные модели для расчета течений в сложных гидравлических системах разработаны на основе абсолютно устойчивых неявных разностных схем. Для решения разностных уравнений предложены специальные алгоритмы, учитывающие топологическую структуру гидравлической системы (графы дерево, графы с циклами) [1-3].

Эффективность предложенного подхода, основанного на базе моделей 2D, 1D, 0D, подтверждается вычислительными экспериментами, выполненными для реальных объектов (устьевая область р. Колыма, озерно-речная система (озеро и река Лама) в Путоранской озерной провинции на северо-западе Среднесибирского плоскогорья в Красноярском крае) [3,4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 4.7 Программы фундаментальных исследований Президиума РАН, гранта РФФИ (№ 09-01-98001 Р-Сибирь-а)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.* Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.
2. *Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.* Численное моделирование температурно-стратифицированных течений в системах глубоких водоемов // Вычисл. технологии, 2005. Т. 10, № 5. С. 29–38.
3. *Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.* Комплексная двумерно-одномерная модель для расчета неустановившихся течений воды в проточных системах открытых русел и водоемов // Труды VII Конференции «Динамика и термика рек, водохранилищ и прибрежной зоны морей», 23-25 ноября 2009 г., Москва. С. 15–19.
4. *Никифоровская В. С.* Численное моделирование водного и экологического режимов в водотоках и озерно-речных системах // Труды 3-ей Всероссийской научной конференции с международным участием «Фундаментальные проблемы воды и водных ресурсов», 24-28 августа 2010 г., Барнаул. С. 194–197.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ[1]

SPECTRAL CHARACTERISTICS OF TWO-COMPONENTAL MOLECULAR DYNAMICS MODEL

Гузев М. А.[1], Дмитриев А. А.[2]

Институт прикладной математики ДВО РАН
Владивосток, Россия
[1]guzev@iam.dvo.ru, [2]dmitriev@iam.dvo.ru

В докладе рассматривается поведение собственных чисел двухкомпонентной модели молекулярной динамики в зависимости от параметров, аналогичной модели, рассмотренной в [1]. В безразмерных переменных эта модель описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f}$, где точка сверху обозначает производную по времени, $\mathbf{u}$ – вектор смещения частиц относительно положения равновесия, $\mathbf{A}$ – матрица материальных коэффициентов, $\mathbf{f}$ – внешнее воздействие на систему.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 11-01-00357-а) и гранта ДВО РАН (№ 09-III-А-01-002).

Для исследуемого случая, с учетом нормировки,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m-1} & \mathbf{e}_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}'_{m-1} & -(1+\alpha\beta) & \alpha\beta\mathbf{e}'_{m+1} \\ \mathbf{0} & \alpha\mathbf{e}_m & \alpha\mathbf{C}_{N-m} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{C}_k = \mathbf{I}_k^- - 2\mathbf{1}_k + \mathbf{I}_k^+$, $\mathbf{1}_k$ – единичная матрица ($= (\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_k)$), $\mathbf{I}_k^- = (\mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_k \ \mathbf{0})$, $\mathbf{I}_k^+ = (\mathbf{0} \ \mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_{k-1})$, ($\mathbf{e}_k$ – единичные векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}_n$); α – частотная характеристика системы, связанная с физическими частотами ω_1, ω_2 исходной системы.

Из результатов работы [2] вытекает, что рассматриваемая задача сводиться к исследованию корней полинома

$$\big[U_m(\mu)+(1-\alpha\beta)U_{m-1}(\mu)\big]U_{N-m}(\nu)-\alpha\beta U_{m-1}(\mu)U_{N-m-1}(\nu), \qquad (1)$$

где $U_k(\mu) = \det(\mathbf{C}_k - \lambda\mathbf{1}_k)$ – полином Чебышева второго рода [3], а $2\mu = -2-\lambda$ и $2\alpha\nu = -2\alpha - \lambda$.

Представим (1) в виде

$$\frac{U_m(\mu)}{U_{m-1}(\mu)}-\alpha\beta+1-\beta\frac{U_{N-m-1}(\nu)}{U_{N-m}(\nu)}.$$

Корни полиномов $U_{m-1}(\mu)$ и $U_{N-m}(\nu)$ являются естественными границами корней полинома (1). Так как корни полиномов Чебышева известны, то несложные вычисления показывают, что *все корни полинома* (1) *принадлежат интервалу* $(-4\max\{1,\alpha\},0)$, *за исключением может быть одного.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузев М. А., Израильский Ю. Г., Шепелов М. А.* Макроскопические характеристики одномерной точно решаемой молекулярной модели на различных масштабах // Физ. мезомех, 2006. Т. 5, № 9. С. 53–57.
2. *Гузев М. А., Дмитриев А. А.* Перемежаемость спектра матрицы, имеющей блочную структуру // Математика в приложениях. Всероссийская конференция, приуроченная к 80-летию ак. С. К. Годунова 20–24 июля 2009 г. Новосибирск: Изд-во ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, 2009. С. 98–99.
3. *Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, ГРФМЛ, 1985.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИКИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ[1]

SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING FOR DYNAMICS PROCESSES OF BIOLOGICAL POPULATIONS

Кожанов А. И.

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
kozhanov@math.nsc.ru

Математическое моделирование динамики возрастной структуры популяции, моделирование взаимодействия в системе "хищник–жертва" (модель Лоттки – Вольтерра) приводят к описанию процесса с помощью дифференциальных уравнений с неподчиненными нелинейными младшими членами, не имеющими свойств монотонности. Наличие в указанных выше биологических процессах абсолютного (астрономического) времени t и "биологического" времени a (то есть возраста) приводит к задачам с двумя временными переменными t и a; дополнительный же учет диффузии (перемешивания) в процессе взаимодействия приводит к описанию процусса с помощью *квазилинейных ультрапараболических уравнений*. Особенностями возникающих при этом краевых задач является то, что соответствующие дифференциальные уравнения содержат нелокальные ("нагруженные") слагаемые, некоторые начально-граничные условия — например, условия, описывающие рождаемость — являются нелокальными.

Некоторые результаты исследований описанных выше математических моделей процессов динамики биологических популяций и будут представлены в настоящем докладе.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 07–06–00390, 09–01–00422а).

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

ON SOME CLASSES OF INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS AND SYSTEMS

Пятков С. Г.

Югорский государственный университет
Ханты-Мансийск, Россия
pyatkov@math.nsc.ru

Мы рассматриваем вопрос о определении вместе с решением правой части специального вида и коэффициентов уравнения в параболических уравнениях и системах. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^{2m} и $Q = (0,T) \times G$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t,x') + f, \quad (t,x) \in Q, \ x = (x', x''), \tag{1}$$

где $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ и A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D) = \sum_{i=r+1}^{sh} q_i(t,x')A_i(t,x,D_x) + A_{sh+1}(t,x,D_x),$$

$$A_i = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_{i\alpha}(t,x)D^\alpha \ (i = r+1, \ldots, sh+1), \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(t,x)D^\beta u|_S = g_j(t,x) \tag{2}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \ldots, m$ и $S = (0,T) \times \Gamma$. Неизвестными в (1), (2) являются решение u, функции $q_i(t,x')$ $(i = 1, 2, \ldots, hs,\ sh \ge r)$, входящие как в правую часть (0.1) так и в оператор A как коэффициенты. Мы рассматриваем два типа условий переопределения. В первом случае условия переопределения для нахождения этих функций q_i имеют вид

$$u|_{S_i} = \psi_i(t,x') \quad \big(S_i = (0,T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s\big), \tag{3}$$

где $\{\Gamma_i\}$ – множество гладких k-мерных поверхностей, лежащих в G. Во втором случае мы рассматриваем на части $S_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$ боковой поверхности цилиндра Q вместо набора граничных операторов данные

Коши, считаем в этом случае, что $k = n - 1$. Таким образом, условия переопределения и граничные данные на S_0 записываются в виде

$$\frac{\partial^i u}{\partial n^i}|_{S_0} = \psi_i(t, x') \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 1, \tag{4}$$

где n – единичная внешняя нормаль к Г. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Большое количество обратных коэффициентных задач с условиями переопределения вида (3) было рассмотрено в случае $k = n - 1$ в работах Белова Ю.Я., Аниконова Ю.Е. и ряда других авторов (см. [1]). В случае $n = 1$ как линейные так и нелинейные задачи подобного вида рассматривались Иванчовым М. и др. и библиография может быть найдена в [2]. Среди монографий, посвященный обратным задачам для параболических и эллиптических уравнений и систем, мы отметим [3,4]. В данной работе, для произвольных граничных операторов и произвольной системы вида (1) при выполнении только лишь условия параболичности мы приводим оценки устойчивости решений задачи (1)-(3) в пространствах Соболева, а при дополнительных условиях на граничные операторы и получаем также и локальную корректность, т.е., существование, единственность и непрерывную зависимость решений от данных задачи. В линейном случае, т.е. когда неизвестные функции входят в правую часть, утверждение о существовании становится глобальным по времени. Задача в столь общем виде ранее не рассматривалась ни одним из авторов, хотя и в частных случаях подобные постановки возникали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belov Ya. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
2. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series. V. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.
3. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations // Appl. Math. Sci. V.127. Berlin: Springer, 2006.
4. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ[1]

STABILITY ESTIMATE OF A SOLUTION TO AN INVERSE PROBLEM OF ELECTRODYNAMICS

Романов В. Г.

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
romanov@math.nsc.ru

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varepsilon_0(x)E(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\varepsilon(x,t-s)E(x,s)ds\Big)-\mathrm{rot}H(x,t)+j(x,t)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)+\mathrm{rot}E(x,t)=0;\quad (x,t)\in\mathbb{R}^4, \tag{1}$$

при нулевых начальных условиях

$$(E,H)_{t<0}=0. \tag{2}$$

Уравнения (1) описывают процесс распространения электромагнитных волн в дисперсной немагнитной среде. Принимается, $\varepsilon_0(x)$ является заданной положительной функцией, $\varepsilon_0(x)\geq\varepsilon_{00}>0$, функция $\varepsilon(x,t)$ представима в виде

$$\varepsilon(x,t)=k(t)\varepsilon_0(x)p(x), \tag{3}$$

в котором $k(t)$ является заданной функцией такой, что $k(0)=1$, а $p(x)$ — неизвестной функцией класса, носитель которой содержится в открытой области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. В качестве стороннего тока $j(x,t)$ используется функция $j=j_0\delta(t)\delta(x_1)$, в которой $j_0=(0,0,1)$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Предполагается также, что плоскость $x_1=0$, на которой локализована дельта-функция $\delta(x_1)$, не принадлежит замыканию области Ω, для определенности принимается, что Ω лежит в полуплоскости $\mathbb{R}^3_d=\{x|\,x_1\geq d\}$ при некотором $d>0$. Кроме того, принимается, что $\varepsilon_0(x)=1$ вне $\mathbb{R}^3_d$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 11-01-00105-а), Минобрнауки РФ (ГК № 14.740.11.0350) и Сибирского отделения РАН (проект СО РАН, выполняемый со сторонними организациями – 2009 – № 93).

Пусть $\tau(x)$ — решение задачи Коши

$$|\nabla\tau(x)|^2 = \varepsilon_0(x); \quad \tau|_{x_1=0} = 0,$$

и $G = G(T)$ — цилиндрическая область: $G(T) = \{(x,t)|\, x \in \Omega, \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$, где T — некоторое положительное число, $S = S(T) = \{(x,t) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R})|\, \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$ — боковая поверхность этой области.

Функции $E(x,t)$, $H(x,t)$, являющиеся решением задачи (1)-(3), при некоторых предположениях о коэффициентах уравнения (1), представимы виде суммы некоторых сингулярных функций, имеющих носитель на характеристической поверхности $t = \tau(x)$, и регулярных функций $\bar{E}(x,t)$, $\bar{H}(x,t)$, с носителем принадлежащим множеству $\{(x,t)|\, t \geq \tau(x)\}$, а именно,

$$E(x,t) = \alpha_E(x)\delta(t - \tau(x)) + \bar{E}(x,t),$$
$$H(x,t) = \alpha_H(x)\delta(t - \tau(x)) + \bar{H}(x,t).$$

Предполагается, что для решения задачи (1)-(3) известны на S:

$$H|_S = g(x,t),\ \frac{\partial H}{\partial n}\Big|_S = h(x,t),\ \alpha_H|_{\partial\Omega} = \alpha'_H(x). \tag{4}$$

Требуется по данным (4) найти $p(x)$ в области Ω.

Для фиксированных чисел $q_0 > 0$, $d > 0$ обозначим через $\Lambda(q_0, d)$ множество функций (ε_0, k, p), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\operatorname{supp} p(x) \subset \Omega$, $\operatorname{supp}(\varepsilon_0(x) - 1) \subset \mathbb{R}^3_d$,

2) $\|p\|_{\mathbf{C}^8(\mathbb{R}^3)} \leq q_0$, $\|\varepsilon_0 - 1\|_{\mathbf{C}^{10}(\mathbb{R}^3))} \leq q_0$, $\|k - 1\|_{\mathbf{C}^4[0,\infty)} \leq q_0$.

Теорема. *Пусть $(\varepsilon_0, k, p_i) \in \Lambda(q_0, d)$, $i = 1, 2$, а $g^i(x,t)$, $h^i(x,t)$, $\alpha^i_H|_{\partial\Omega}(x)$ — данные Коши, соответствующие решению задачи (1)-(3) при $p = p_i(x)$. Пусть, кроме того, область Ω содержится в некоторой римановой сфере радиуса ρ и выполнено условие $T > 4\rho$. Тогда найдутся положительные числа q_0^*, C такие, что при всех $q_0 \leq q_0^*$ выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}\|p_1 - p_2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \leq \quad & C\Big(\|g^1_t - g^2_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|h^1_t - h^2_t\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} \\ & + \|\alpha^1_H - \alpha^2_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\beta^1_H - \beta^2_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

В этой формуле $\beta^i_H(x) = g^i(x, \tau(x) + 0)$, $i = 1, 2$.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE HIGHT ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

Солдатов А.П.

Белгородский государственный университет
Белгород, Россия
soldatov48@gmail.com

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ограниченной ляпуновским контуром Γ, сильно эллиптическую систему Ламе

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

для вектора смещений $u = (u_1, u_2)$ с матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \qquad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det[a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2] = 0$ этой системы в верхней полуплоскости имеет два корня ν_1, ν_2. В зависимости от двух возможных случаев $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ положим, соответственно,

$$J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Как установлено в [1], найдется такая обратимая матрица $b \in \mathbb{C}^{l\times l}$, что $a_0 b + a_1 bJ + a_2 bJ^2 = 0$ и блочная матрица B с элементами $B_{11} = \overline{B_{12}} = b$, $B_{21} = \overline{B_{22}} = bJ$ обратима. При этом любая другая матрица b_1 с теми же свойствами связана с b соотношением $b_1 = bd$ с некоторой обратимой матрицей d, коммутирующей с J. В частности, однородная степени нуль матрица-функция

$$H(\xi) = Im\,[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} b^{-1}]$$

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П693 и № 02.740.11.0613)

не зависит от выбора b.

Обобщенный потенциал двойного слоя для системы Ламе представляет собой интеграл

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} Q(t, t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D,$$

с ядром $Q(t,\xi) = |\xi|^{-2}[n_1(t)\xi_1 + n_2(t)]H(\xi)$, где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Для любой вектор-функции $\varphi \in C(\Gamma)$ он определяет функцию $u \in C(\overline{D})$, удовлетворяющей системе Ламе в области D.

С помощью этого потенциала в работе установлена редукция задачи Дирихле в классе $C(\overline{D})$ к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода на Γ. В частности, задача Дирихле является фредгольмовой и в классе $C(\overline{D})$. Аналогичные результат справедлив по отношению к задаче Неймана, краевое условие которой можно проинтегрировать и записать в форме задачи Дирихле для сопряженной вектор- функции v. Для функции v потенциал двойного слоя определяется аналогично с той разницей, что матрица b заменяется на $c = a_{21}b + a_{22}bJ$. Матрицы b, c вычисляются явно [2], так что соответствующие явные выражения можно дать и для ядер Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солдатов А. П.* О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39, №5. С. 674–686.
2. *Soldatov A. P.* To the theory of anisotropic plane elasticity // Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags, 2010. V. 30(2). P. 107–117.

ОБ ИЗГИБЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН С ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

ON BENDING OF ELASTIC PLATES WITH THIN RIGID INCLUSIONS

Хлуднев А. М.

Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия
khlud@hydro.nsc.ru

В докладе рассматриваются задачи об изгибе упругих пластин, содержащих тонкие жесткие включения. Предполагается, что включения могут отслаиваться, тем самым образуя трещины. Найдена система краевых условий, выполняющихся на берегах трещины. Доказано существование решения. Рассмотрена также задача об изгибе пластины с объемным жестким включением. Установлена сходимость решений такой задачи к решению исходной при стремлении размера объемного жесткого включения к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. Москва: Физматлит, 2010.
2. *Хлуднев А. М.* Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. ж. индустр. матем., 2011. Т. 14, № 1(45). С. 114–126.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 10-01-00054) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (№ П597).

Секция I. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ON PRESENTATION OF THE SOLUTION OF MODIFIED CAUCHY PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION OF SECOND KIND

Mamadaliev N. K.

National university of Uzbekistan named after M.Ulugbek
Tashkent, Uzbekistan
mamadaliev57@mail.ru

In research of the mixed-type equations as well parabolic-hyperbolic type as elliptic-hyperbolic type, the main role plays the hyperbolic equation and its solution of Cauchy problem. When we solve the Cauchy problem, we find out the correctness of the statement of the problem. Existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem were researched by Bitcadze A.V, Salahitdinov M.S, Tersenov S.A and other.

$$L_2U = U_{xx} + yU_{yy} + \alpha U_y = 0, \quad y < 0 \tag{1}$$

$$U(x,0) = \tau(x), \quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}\left[U - A_n^-(\tau)\right]_y^{'} = \nu(x), \tag{2}$$

$$\tau(x) \in C^{2(n+1)}[0,1], \quad \nu(x) \in C^2[0,1]$$

Let us note, that the continuous solution of the modified Cauchy problem for the equation (1) with initial conditions (2) was found in article [1], in following view

$$U(x,y) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(\alpha,n,\delta)(-y)^k \int_0^1 \tau^{(2k)}(\lambda)[t(1-t)]^{k+\delta}dt -$$

$$-\gamma_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu(\lambda)[t(1-t)]^{\frac{1}{2}-\alpha}dt$$

where

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2+2\delta)}{\Gamma^2(1+\delta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(1-2\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1/2-\alpha)},$$

$$N_k(\alpha, n, \delta) = \frac{2^{2k} C_n^k \Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+k)(\alpha)_n},$$

$$\delta = \alpha + n - 3/2, \ \alpha = -n + \alpha_0,$$

$$0 < \alpha_0 < 1/2, \ or \ 1/2 < \alpha_0 < 1, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

The generalized solution of this problem in R_2 class was found in [2]. In this paper the generalized solution of the modified Cauchy problem in R_2 class for equation (1) was found in case of complex α.

REFERENCES

1. *Tersenov S.A.* To theories of the hyperbolic equations with given on lines of the degeneration of type // Sib. math. journal, 1961. V.2, № 6. P. 931–935.
2. *Mamadaliev N.K.* About of presentation solution of the modified problem Kochi // Sib. math. journal RAS, 2000. V 41, № 5. P. 1087–1097.

ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРЯЖЕННЫЕ ИМ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

PROBLEMS WITH DEVIATION FROM CHARACTERISTICS AND THEIR CONJUGATED PROBLEMS FOR ONE CLASS OF MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS

Алдашев С. А., Сеилханова Р. Б.

Институт прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан
aldash51@mail.ru

В [1] для уравнения колебания струны изучались задачи с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение этих задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2]. С использованием изложенного в [3] метода, в данной работе для одного класса многомерных гиперболических уравнений получен критерий однозначной разрешимости задачи с отходом от характеристики.

Пусть D_β– конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная конусами $\beta|x| = t, |x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$– длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 < \beta = const \leq 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \qquad (1)$$

$$L^*\upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - u_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \qquad (1^*)$$

где Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерных аналогов задач с отходом от характеристики рассмотрим

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_S = \tau(x), \quad u\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \qquad (2)$$

или

$$u_t\Big|_S = \nu(x), \quad u\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \qquad (3)$$

а также рассмотрим сопряженные ей задачи Дирихле и Пуанкаре.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$– система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S_0)$, $l = 0, 1, ...$ - пространства Соболева.

Имеет место ([4]).

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \qquad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Введем множество функций

$$B^l(S) = \{f(r,\theta) : f \in W_2^l(S),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(||f_n^k(r)||^2_{C^2((0,1))}+$$
$$+||f_n^k(r)||^2_{C^1([0,1])})\exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l > m-1\}.$$

Пусть $a_i(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\bar{D}_\beta),\ i = 1, ..., m,$ $l \geq m+1$ и $\tau(r,\theta) = r\tau^*(r,\theta),\ \nu(r,\theta) = r\nu^*(r,\theta),\ \sigma(r,\theta) = r\sigma^*(r,\theta),$ $\tau^*(r,\theta),\ \nu^*(r,\theta) \in B^l(S),\ \sigma^*(r,\theta) \in B^l(\tilde{S}_\beta).$

Тогда при $0 < \beta < 1$ справедливы.

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима.*

Также, при $\beta = 1$ в [5] доказана.

Теорема 2. *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Пусть теперь $0 < \beta \leq 1$. Тогда, из теорем 1 и 3 вытекает справедливость следующего критерия:

Теорема 3. *Задача 1 однозначно разрешима, тогда и только тогда, когда* $\beta < 1$.

Доказательство теоремы 3. Если $0 < \beta < 1$, то из теоремы 1 следует однозначная разрешимость задачи 1.

Покажем, что если задача 1 однозначно разрешима, то $0 < \beta < 1$.

Предположим противное, т.е. $\beta = 1$. В этом случае, из теоремы 2 приходим к противоречию нашего предположения. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981
2. *Protter M.H.* New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J.Rath.Mech.Anal., 1954. V.3, № 4. P. 435–446.
3. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.
4. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
5. *Алдашев С.А.* Критерий однозначной разрешимости задачи Дарбу с отходом от характеристики для многомерного волнового уравнения // Известия НАН РК, сер.физ.-мат., Алматы, 2007. №3. С.15–19.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА[1]

Антипин В. И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
antvasiv@mail.ru

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно – дифференциальных уравнений вида

$$Lu \equiv Bu_t - Au = f(x,t), \tag{1}$$

где A, B – линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E. Мы не предполагаем, что оператор B обратим; в частности, он может иметь ненулевое ядро и спектр оператора B содержит одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуоси. Такие уравнения возникают в физике, геометрии, популяционной генетике и некоторых других областях. Ранее вопросы разрешимости краевых задач для таких уравнений исследовались в случае, когда операторы A, B самосопряжены в данном гильбертовом пространстве E. В данной работе условие самосопряженности оператора A заменяется условием его диссипативности. Под диссипативным оператором мы понимаем оператор, удовлетворяющий условию: $Re(-Au;u) \geq \delta\|u\|^2_{H_1}$ для всех $u \in D(A)$, где $D(A)$ – область определения оператора A [1,2].

В уравнения вида (1) входят уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени [3], а также многомерные уравнения нечетного порядка

$$g(x)u_t - Lu = f(x,t),$$

где L — дифференциальный оператор вида

$$Lu \equiv (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+1} a_i(x)u^{(i)}, \quad a_{2m+1} = 1,$$

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(П1182), а также АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы) рег. номер проекта 2.1.1/13607.

$g(x) \in L_1(0,1)$ — вещественная, измеримая на $(0,1)$ функция, такая, что существуют открытые $G^+, G^- \subset (0,1)$ со свойством $\mu(\overline{G}^+ \backslash G^+) = 0$, $\mu(\overline{G}^- \backslash G^-) = 0$, и $g(x) > 0$ почти всюду на G^+, $g(x) < 0$ почти всюду на G^- и $g(x) = 0$ на $G \backslash (\overline{G}^+ \cup \overline{G}^-)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
2. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965.
3. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.

ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

PROBLEM WITH BOUNDARY CONDITIONS FOR LOADED WAVE EQUATION

Аттаев А. Х.

НИИ прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия
niipma@mail333.com

В данной работе объектом исследования является нелокальное уравнение колебания струны

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)[u(x,t) - \lambda(x)u(x_0,t)] = 0, \tag{1}$$

которое описывает процесс колебания струны, концами которой служат точки $x = 0$ и $x = l$, $\lambda(x)$– известная функция, $0 < x_0 = const < l$.

Примем следующие обозначения

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(x),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x),\ 0 \le x \le l. \tag{4}$$

Пусть $1-\lambda(x_0)=\lambda_0\neq 0$, тогда легко заметить, что функция $u(x,t)$, определямая формулой

$$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)+\frac{\lambda(x)}{\lambda_0}[f(x_0-t)+g(x_0+t)], \qquad (5)$$

есть решение уравнения (1), если $f(x)$ и $g(x)$– произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Формулу (5) назовем аналогом формулы Даламбера.

Найдем решение задачи Коши (2) для уравнения (1) в случае неограниченной струны, то есть когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на $(-\infty,\infty)$.

Удовлетворяя (5) условиям (2) и решая полученную систему относительно $f(x)$ и $g(x)$, находим

$$f(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)-\int\limits_0^x\psi(\xi)d\xi-\frac{\lambda(x)}{\lambda_0}\varphi(x_0)+\beta(x)\psi(x_0)-C], \qquad (6)$$

$$g(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\int\limits_0^x\psi(\xi)d\xi-\frac{\lambda(x)}{\lambda_0}\varphi(x_0)-\beta(x)\psi(x_0)+C], \qquad (7)$$

где $\beta(x)=\int\limits_0^x\lambda(\xi)d\xi$.

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3). Будем искать решение в форме (5). Начальные условия (2) позволяют определить функции $f(x)$ и $g(x)$ в промежутке $0\leq x\leq l$. Подставляя значения $f(x)$ и $g(x)$ из (6) и (7) в (5), получим формулу решения задачи Коши (2) для уравнения (1). Функция $u(x,t)$ при этом определяется в области $\Omega=\{(x,y):0<x-t<l,\ t=0,\ t=x_0\}$, являющейся равнобочной трапецией.

Удовлетворим условиям (3) и выберем как и в [1] нужным образом продолжения $f(x)$ и $g(x)$ на всю область, которая нас интересует. Подставляя выражение (5) в (3), получим

$$\begin{gathered} f(-t)+g(t)+\lambda(0)[f(x_0-t)+g(x_0+t)]/\lambda_0=\mu(t),\\ f(l-t)+g(l+t)+\lambda(l)[f(x_0-t)+g(x_0+t)]/\lambda_0=\nu(t). \end{gathered} \qquad (8)$$

Меняя в первом уравнении $-t$ на x, а во втором $l+t$ на x, перепишем (8) в виде

$$f(x)=\mu(-x)-g(-x)-\lambda(0)[f(x_0+x)+g(x_0-x)]/\lambda_0, \qquad (9)$$

$$g(x) = \nu(x-l) - f(2l-x) - \lambda(l)[f(x_0+l-x) + g(x_0-l+x)]/\lambda_0. \quad (10)$$

Формула (9) позволяет определить значение $f(x)$ на отрезке $[-x_0, 0]$, а формула (10) – значение $g(x)$ на отрезке $[l, l+x_0]$, если известны значения $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[0, l]$. Точно также исходя из значений $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[-x_0, l+x_0]$, можно по формуле (9) вычислить $f(x)$ на отрезке $[-2x_0, -x_0]$, а по формуле (10) – $g(x)$ на $[l, l+2x_0]$, и так далее. Решение искомой задачи можно записать теперь, используя формулу (5), как и в случае неограниченной струны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ОХРАНЯЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ДОБЫЧИ

THE STABILITY OF POPULATION DYNAMICS MODEL AT OPTIMIZATION OF EXTRACTION FUNCTION

Васильев М. Д.[1], **Трофимцев Ю. И.**[2]

[1] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
ayaal@mail.ru
[2] *ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия*
trofimtsev@mail.ru

Изучается параметрическая модель динамики численности популяции при оптимальном выборе функции добычи. В рамках модели предполагается существование миграции между охраняемой и остальной частью территории. Оптимальное значение функции добычи может приводить к возникновению бифуркаций в модели [1].

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений, описывающая развитие популяции на охраняемой территории и вне ее:

$$\begin{cases} \dot{x} = gx(t) + d_1(s)(y(t) - x(t)) - f(x), \\ \dot{y} = ay(t) + d_2(s)(x(t) - y(t)) - cy^2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ – плотность популяции вне охраняемой территории; $y(t)$ – плотность популяции внутри охраняемой территории; $f(x)$ – функция, описывающая добычу популяции вне охраняемой территории; g –

коэффициент равный разности коэффициентов рождаемости и смертности популяции вне охранямой территории; a – коэффициент равный разности коэффициентов рождаемости и смертности популяции внутри охраняемой территории; c – коэффициент, конкуренции внутри популяции на охраняемой территории; $d_1(s)$ и $d_2(s)$ – коэффициенты, описывающие обмены между охраняемой территорией и остальной частью ареала популяции; s – доля заповедной территории. Коэффициент g – любое действительное число, все остальные коэффициенты неотрицательны.

Исследованы фазовые портреты системы (1) при $f(x) = b$ и различных значениях параметров, и найдены их бифуркационные значения [2]. Количество особых точек системы может равняться 0, 1 или 2 (в зависимости от значений b), основные виды которых – седло и устойчивый узел. Система (1) не имеет особых точек типа фокус и центр, что означает отсутствие периодических колебаний. В общем случае бифуркационный параметр имеет вид $(a - d_2)(d_1 - g) - d_1 d_2$ и зависит от знаков разностей $d_1 - g$ и $d_2 - a$.

Для определения оптимального режима добычи, рассматриваемая динамическая модель, формализуется двухагентной бескоалиционной иерархической игрой. В рассматриваемой игре управлением Центра (Агента 1) является доля заповедной части территории s. Игрок второго уровня иерархии (Агент 2) управляет величиной добычи b. В качестве критерия оптимальности рассматривается равновесие по Нэшу [3].

Функция выигрыша Центра записывается в виде

$$K_0 = \begin{cases} l_1(1-s) - l_2 s + \frac{\lambda}{(1-s)}(b-m), b > m, \\ l_1(1-s) - l_2 s, b \leq m, \end{cases}$$

где l_1 – затраты на использование неохраняемой территории, l_2 – затраты на содержание охраняемой территории, m – размер популяции оптимальный для использования и λ – ставка штрафа за превышение нормы добычи.

Выигрыш игрока второго уровня имеет вид:

$$K_1 = \begin{cases} b(p - qb) - l_1(1-s) - \frac{\lambda}{(1-s)}(b-m), b > m, \\ b(p - qb) - l_1(1-s), b \leq m, \end{cases}$$

здесь p – цена продажи добычи, q – затраты на добычу.

Получено следующее оптимальное решение игры

$$s = 1 - \sqrt{\frac{\lambda(b-m)}{l_1+l_2}}, b = \frac{p(1-s)-\lambda}{2q(1-s)}, \lambda \leq \min\left\{\frac{p^2(b-m)}{l_1+l_2}; \frac{l_1+l_2}{b-m}\right\}.$$

Полученные результаты могут быть обобщены на случай многоагентной бескоалиционной иерархической игры. Функция добычи в системе (1), также рассматривается в виде $f(x) = b + hx(t)$, где b - величина браконьерской добычи, величина h является управлением игрока второго уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
2. *Vasilyev M. D.* The stability of ODE system in the models of population dynamics // International Young Scientists Conference on Mathematical Modeling. Linyi, China, May, 24-25, 2010. Abstracts. / Yakutsk: IMI YSU, 2010.
3. *Bazar T., Olsder G. J.* Dynamic noncooperative game theory. - Academic Press, New York, 1982.

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА[1]

ON THE FREDHOLM SOLVABILITY OF A BOUNDARY PROBLEM FOR EQUATIONS OF MIXED TYPE

Егоров И. Е.

ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия
niipmi@sitc.ru

Среди многочисленных работ, посвященных исследованию обобщенной разрешимости различных краевых задач для уравнений смешанного типа, отметим лишь работы [1-5]. При этом фредгольмовая разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа рассматривалась в [2-5].

Пусть Ω – ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение смешанного типа

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, No 02.740.11.0609

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)u_{x_i}) + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (1)$$

где коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$ и выполнены условия $a_{ij} = a_{ji},\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2,\ \forall\xi \in R^n,\ \nu > 0$.

Приводятся теоремы фредгольмовости и обобщенной разрешимости краевых задач для уравнения (1). В частности рассмотрена фредгольмовая разрешимость краевой задачи, которая впервые была поставлена и исследована В.Н. Враговым [1]. При этом используются компактные вложения некоторых весовых пространств Соболева в негативные пространства Лакса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, №8. С. 1098–1105.
2. *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, №8. С. 1418–1425.
3. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988.
4. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к гидродинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
5. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОВЕДЕНИЯ ТОНКОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ИЗ МАТЕРИАЛА КЕЛЬВИНА–ФОЙГХТА ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ

ON THE PROBLEM OF DYMANICS OF THIN NONHOMOGENEOUS BEAM MADE OF KELVIN–FOICHT'S MATERIALS WITH CONCENTRATED AND DISTRIBUTED FORCES AND MOMENTS

Егорова А. А.

ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия
alena.egorova@gmail.com

В работе строится полное асимптотическое разложение трехмерной задачи теории линейной вязкоупругости, заданной в тонком неоднородном периодически неоднородном стержне, закрепленном с одного

конца, и испытывающем действие распределенных по торцу сил на другом конце. Уравнения этой задачи соответствуют теории линейной вязко-упругости в случае материала Кельвина-Фойгхта.

С помощью метода усреднения, разработанного Н.С.Бахваловым, выводятся усредненные уравнения для продольных, поперечных и крутильных колебаний стержня. Исследуются задачи для пограничных слоев при условии пропорциональности тензоров упругости и вязкости. Доказываются соответствующие теоремы о разрешимости задач типа Соболева, теорема об оценке разности точного и асимптотического решений.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДАРБУ–ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

SOLVABILITY OF THE DARBOUX–PROTTER'S PROBLEM FOR MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH TYPE AND ORDER DEGENERATION

Ермекбаев Е. Ж.

Институт прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

Рассмотрим на полупространстве $t > 0$ уравнение

$$t^p \Delta_x u - t^q u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \qquad (1)$$

где $p, q = const \geq 0$, $p \geq q$, Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $x = (x_1 ..., x_m)$, $m \geq 2$, на важность исследования которых обратил внимание еще А.В.Бицадзе [1]. Уравнения (1) гиперболично при $t > 0$, а вдоль плоскости $t = 0$ имеет место вырождения его типа и порядка. Обозначим через $D-$ конечную область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченную поверхностями $|x| = \frac{2}{p-q+2} t^{\frac{p-q+2}{2}}, |x| = 1 - \frac{2}{p-q+2} t^{\frac{p-q+2}{2}}$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|-$ длина вектора x, $0 \leq t \leq \left(\frac{(p-q+2)}{4}\right)^{\frac{2}{p-q+2}}$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно.

Рассмотрим следующую задачу Дарбу-Проттера для уравнения (1).

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_S = \tau(x),\ u\Big|_{S_1} = \sigma_1(x) \tag{2}$$

или

$$u_t\Big|_S = \nu(x),\ u\Big|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, сохранив обозначения, использованные в [2, 3].

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+ +m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...-$ пространство Соболева, а $\tilde{S} = \left\{(r, \theta) \in S,\ 0 < r < \frac{1}{2}\right\}$.

Пусть $\bar{a}_i(x,t) = t^{-q}a_i,\ b(x,t) = t^{-q}b,\ \bar{c}(x,t) = t^{-q}c$ и $\bar{a}_i,\ \bar{b}$, $\bar{c} \in W^l_2(D) \subset C^1(\bar{D}),\ i = 1, ..., m, l \ge m+1$. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если* $\tau(r,\theta) = r^4\tau^*(r,\theta),\ \nu(r,\theta) = r^4\nu^*(r,\theta)$, $\sigma_1(t,\theta) = \left(r - \frac{1}{2}\right)^{\frac{m+5}{2}} \sigma^*_1(r,\theta),\ \tau^*(r,\theta),\ \nu^*(r,\theta) \in W^l_2(S)$, $\sigma^*_1(r,\theta) \in W^l_2(S \setminus \tilde{S})$, $l > \frac{6+3m}{2}$, *то задача 1 однозначно разрешима.* Единственность решения задачи 1 установлено в [3,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных,М.: Наука, 1981.
2. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.
3. *Алдашев С.А., Ермекбаев Е.Ж.* // Вестник КазНПУ им.Абая, серия физ.-мат.науки, 2006. № 1(15). С. 10–17.
4. *Алдашев С.А., Ермекбаев Е.Ж.* // Материалы международного российско-казахского симп."Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик: НИИ ПМА РАН, 2004. С.18–20.

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ПРЕДЕЛЬНО – ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

SOME SPECTRAL PROPERTIES OF A CLASS OF ELLIPTIC OPERATORS IN A LIMIT – TUBE DOMAIN

Исхоков С. А.[1], **Гадоев М. Г.**[2], **Петрова М. Н.**[3]

[1]*Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан*
sulaimon@mail.ru
[2,3]*Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ*
Мирный, Россия
[2]gadoev@rambler.ru, [3]sun1u@mail.ru

Пусть $G \subset R^{n-1}$ – конечная область. Предельно - цилиндрической областью в R^n называется область вида: $\Omega = \{x = (x', x_n) : x'F^{-1}(x_n) \in G\}$, где $F(t) \quad (-\infty < t < +\infty)$- положительная непрерывная функция.

Пусть m, l- натуральные числа и $\theta < m$. Введем пространство $W^m_{2,\theta}(\Omega)^l$ функций $u(x), x \in \Omega$, с конечной нормой

$$||u|| = (\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \rho^{2\theta}(x)|D^\alpha_x u(x)|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{1/2}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z^n_+, |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, D^\alpha_x = (\frac{\partial}{i\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial}{i\partial x_n})^{\alpha_n}$, $\rho(x) \in C^\infty(\Omega)$ - положительная функция такая, что

$$\rho(x) \leq dist\,\{x, \partial\Omega\} \leq M\rho(x),\ |D^\alpha_x \rho(x)| \leq M_\alpha \rho^{1-|\alpha|}(x)\ (\forall \alpha \in Z^n_+).$$

Обозначим через $\mathcal{H}^\circ$ замыкание пространства $C^\infty_0(\Omega)^l$ в пространстве $\mathcal{H} = W^m_{2,\theta}(\Omega)^l$. Пусть $H_+ \subset H = L_2(\Omega)^l$ – подпространство, такое, что $\mathcal{H}^\circ \subset H_+$ и $\psi u \in H_+$ для любых $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u \in H_+$.

В пространстве H рассмотрим билинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (p_\alpha(x) a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha_x u(x),\ p_\beta(x) D^\beta_x v(x)), D[B] = H_+, \quad (1)$$

где $p_\alpha(x) = p(x)^{\theta+|\alpha|-m}$, $a_{\alpha\beta}(x) = (a^{ij}_{\alpha\beta}(x))^l_{i,j=1}$, а $a^{ij}_{\alpha\beta}(x)$ – измеримые функции, ограниченные в Ω и $(,)$ – скалярное произведение в H.

Доклад посвящен спектральным свойствам дифференциального оператора A, порожденного в H билинейной формой (1).

Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:
(1) $H_+ = H^\circ, \theta + \frac{1}{2} \notin \{1, .., m\}$.
(2) $H_+ = H^\circ, |a^{ij}_{\alpha\beta}(x)| \leq Mp^\delta(x), (|\alpha| + |\beta| < 2m), \delta > 0$.
(3) $\theta \geq 0$, $a_{\alpha\beta}(x) \equiv 0, (|\alpha| + |\beta| < 2m), \partial\Omega \in C^1$.
Введем функцию

$$A(x, \xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \langle a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha, \xi_\beta\rangle_{\mathbb{C}^l} \quad (x \in \Omega,\ \xi = \{\xi_\alpha\}_{|\alpha|\leq m},\ \xi_\alpha \in \mathbb{C}^l).$$

Пусть для всех $x \in \Omega$, $\xi = \{\xi_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$, $\xi_\alpha \in \mathbb{C}^l$ выполнены неравенства:

$$|argA(x, \xi)| < \pi - \varepsilon, \qquad \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2_{\mathbb{C}^l} \leq MRe\{\gamma(x)A(x, \xi)\},$$

где $\varepsilon, M > 0, \gamma(x), \gamma^{-1}(x) \in C(\overline{\Omega})$. Функция $argz$ принимает значения на отрезке $(-\pi; \pi]$.

При выполнении сформулированных выше условий имеет место следующая

Теорема. *Существует единственный замкнутый оператор A в H, обладающий свойствами:*

(i) $D(A) \subset H_+, (Au, v) = B[u, v], (\forall u \in D(A), v \in H_+)$;

(ii) *при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ для оператора $A - \lambda E$ существует непрерывный обратный $(A - \lambda E)^{-1} : H \to H$.*

Замечание. Аналогичные вопросы исследованы в [1, 2] в случае, когда Ω – ограниченная область удовлетворяющая условию конуса. А в работе [3] установлена уточненная оценка резольвенты оператора A, т.е. с показателем 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойматов К. Х.* Матричные дифференциальные операторы,порожденные некоэрцитивными формами // Доклады РАН, 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.
2. *Бойматов К.Х., Исхоков С.А.* О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, 1997. Т. 214. С. 107–134.
3. *Бойматов К.Х.* О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно – эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сиб. мат. журн., 2006. Т. 47, №1. С. 46–57.

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

ABOUT SMOOTHNESS OF ONE BOUNDARY PROBLEM SOLUTION FOR LAPLACE EQUATION IN HOLDER CLASSES

Кадиркулов Б. Ж.

Ташкентский государственный институт востоковедения
Ташкент, Узбекистан
k_bahtiyor_j@mail.ru

В настоящей работе исследуется вопросы гладкости решения одной краевой задачи в классе Гёльдера для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка типа Адамара-Маршо. Доказана теорема о единственности и существовании решения этой задачи.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - n-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера, а $\alpha \in (0,1)$, $\mu \geq 0$ – действительные числа.

В области Ω рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u(x) = 0, \;\; x \in \Omega \tag{1}$$

$$D_\mu^\alpha[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{2}$$

где D_μ^α – известный оператор дробного дифференцирования типа Адамара – Маршо, который определяется по формуле [1, 2]

$$D_\mu^\alpha[\phi](x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{\mu-1} \left[\phi(x) - \phi(sx)\right] ds + \mu^\alpha \phi(x)$$

Решением задачи (1),(2) назовем гармоническую функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ такую, что $D_\mu^\alpha[u](x) \in C(\overline{\Omega})$ и выполняется условие (2) в классическом смысле.

Заметим, что аналогичные задачи с операторами целого порядка рассматривались в работах [3,4], а для операторов дробного порядка в работах [2, 5, 6].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $0 < \lambda$, $\alpha \in (0,1)$, λ *и* $\lambda + \alpha$*- нецелые числа,* $f(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$. *Тогда*

1) если $\mu > 0$, *то решение задачи 1 существует, единственно и*

принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}(\bar{\Omega})$, *причём* $D^{\alpha}_{\mu}[u](x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.

2) если $\mu = 0$, *то для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнение условия* $\int\limits_{\partial\Omega} f(x)\, dS_x = 0$.

Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянной и принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}(\bar{\Omega})$, *причем* $D^{\alpha}_{0}[u](x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Килбас А. А.* Дробная производная типа Маршо-Адамара и обращение дробных интегралов // Доклады Национальной академии наук Беларуси, 2006. Т. 50, № 4. С. 5–10.
2. *Турметов Б. Х., Ильясова М. Т.* О разрешимости одной краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Адамара-Маршо // Известия Челябинского научного центра, 2008. Вып. 4 (42). С. 1–6.
3. *Бицадзе А. В.* К задаче Неймана для гармонических функций // ДАН СССР, 1990. Т. 990. С. 11–13
4. *Баврин И. И.* Операторы для гармонических функций и их приложения // Дифференциальные уравнения, 1985. Т. 21, № 1. С. 9–15.
5. *Турметов Б. Х.* О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Труды Математики, 2004. Т. 7, № 1 С. 189–199.
6. *Карачик В. В., Турметов Б. Х., Торебек Б. Т.* Некоторые интегро-дифференциальные операторы в классе гармонических функций и их применения // Известия Челябинского научного центра (сер. Математика), 2010. Вып. 46. С. 1–9.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONCLASSICAL EQUATIONS WITH CHANGING TIME DIRECTION

Львов А. П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
lvovap@yandex.ru

В работе [1] Попова С.В. рассматривалась краевая задача для уравнения с вырождающейся эллиптической частью. В работе [2] Егоро-

вым И.Е. и Федоровым В.Е. было проведено исследование разрешимости локальной краевой задачи для уравнения из работы [1]. В [3] изучалась разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени с эллиптическим оператором для пространственной переменной.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей S. В области $Q=\Omega\times(0,T)$, $S_T=S\times(0,T)$ рассматривается уравнение

$$Lu\equiv\sum_{i=1}^{3}k_i(x,t)D_t^iu+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}+C(x)u=f(x,t), \tag{1}$$

$$Q(x,t,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant 0,\ a_{ij}(x,t)=a_{j\,i}(x,t),\ (x,t)\in Q,\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Положим:

$$\Gamma_0=\{(x,t)\in S_T:\ Q(x,t,n)=0\},$$

$$\Gamma_1=\{(x,t)\in\Gamma_0:\ \Phi(x,t)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ji,x_j})n_i>0\},$$

$$\Gamma_2=\{(x,t)\in\Gamma_0:\ \Phi(x,t)<0\},\ \Gamma_3=S_T\backslash\Gamma_0.$$

Найти решение уравнения (1) в области Q, такое, что

$$u|_{\overline{\Gamma}_2\bigcup\overline{\Gamma}_3}=0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=u|_{t=T}=0, \tag{3}$$

$$u_t|_{t=0}=\mu u_t|_{t=T}, \tag{4}$$

где μ – вещественное число.

Пусть C_L–класс гладких функций в $\overline{Q}$, удовлетворяющих условиям (2)–(4), $C_L^{/}$–класс гладких функций в $\overline{Q}$, удовлетворяющих условиям (2)–(3).

Лемма. Пусть коэффициент $C(x)<0$ достаточно большой по модулю, $k_3(x,0)>0$, $k_3(x,T)>0$, $|\mu|\leqslant\sqrt{\dfrac{k_3(x,T)}{k_3(x,0)}}$, $k_2-\frac{3}{2}k_{3,t}\geqslant\delta>0$. Тогда для любой функции $u(x,t)\in C_L$ имеет место неравенство:

$$-(Lu,u)\geqslant C_1\int_Q(u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+u^2)dQ,\quad C_1>0. \tag{5}$$

Пусть C_{L^*} – класс гладких функций в $\overline{Q}$, удовлетворяющих условиям:

$$v|_{\overline{\Gamma}_1 \bigcup \overline{\Gamma}_3} = 0, \quad v|_{t=0} = u|_{t=T} = 0, \quad v_t|_{t=T} = \mu v_t|_{t=0},$$

и $Z(u,v) \equiv (Lu,v)$.

Введем следующие обозначения: H_1 – пространство, полученное замыканием $C_L^{/}$ по норме $\|u\|_{H_1}^2 = \int\limits_Q (u_t^2 + \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2) dQ$, H_{-1} – замыкание множества функций $L_2(Q)$ по норме $\|f\|_{H_{-1}} = \sup\limits_{u \in H_1} \frac{(f,u)}{\|u\|_{H_1}}$, H_2 – гильбертово пространство, полученное замыканием C_{L^*} по норме $\|u\|_{H_2}^2 = \int\limits_Q v_{tt}^2 dQ + \|v\|_{H_1}^2$.

Определение. Функция $u(x,t)$ из H_1 называется обобщенным решением краевой задачи (1)–(4), если выполняется тождество

$$Z(u,v) \equiv (f,v),$$

для f из $H_{-1}(Q)$ и любых v из H_2.

Теорема. *Пусть коэффициент $C(x) < 0$ достаточно большой по модулю, $k_3(x,0) > 0$, $k_3(x,T) > 0$, $|\mu| \leqslant \sqrt{\dfrac{k_3(x,T)}{k_3(x,0)}}$, $k_2 - \frac{3}{2} k_{3,t} \geqslant \delta > 0$. Тогда для любой функции $f(x,t)$ из $H_{-1}(Q)$ существует обобщенное решение краевой задачи (1)–(4).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов С.В.* О разрешимости краевой задачи для одного уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени // Дифференциальные уравнения и их приложения. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1989. С.39–47.
2. *Егоров И.Е., Федоров В.Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
3. *Lvov A. P.* On solvability of a nonlocal boundary value problem for an equation with varying time direction // Мат. заметки ЯГУ, 2001. Т.8, Вып. 2. С. 103–111.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE ULTRAPARABOLIC EQUATIONS

Лукина Г. А.

Политехнический институт (филиал) СВФУ, Мирный, Россия
lukina-g@mail.ru

Краевые задачи с интегральными граничными условиями для параболических и гиперболических уравнений весьма активно исследуются в последнее время. В то же время работ, посвященных разрешимости краевых задач с граничными условиями интегрального вида для ультрапараболических уравнений практически нет, можно отметить лишь работы [1,2], в которых рассматривались краевые задачи в иных, нежели в настоящей работе, постановках.

Пусть Ω есть интервал (0,1) оси Ox, $Q = \Omega \times (0, T_1) \times (0, T_2)$, $0 < T_1 < +\infty$, $0 < T_2 < +\infty$. Далее, пусть $c(x,t,\tau)$, $f(x,t,\tau)$, $K_1(x,t,\tau)$, $K_2(x,t,\tau)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T_1]$, $\tau \in [0, T_2]$.

Рассматривается краевая задача: найти функцию $u(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения

$$u_t + u_\tau - u_{xx} + c(x,t,\tau)u = f(x,t,\tau) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0,\tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0, T_2), \tag{2}$$

$$u(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T_1), \tag{3}$$

$$u(0,t,\tau) = \int_0^1 K_1(x,t,\tau)u(x,t,\tau)dx, \tag{4}$$

$$u(1,t,\tau) = \int_0^1 K_2(x,t,\tau)u(x,t,\tau)dx, \quad t \in (0, T_1), \quad \tau \in (0, T_2). \tag{5}$$

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно - педагогические кадры инновационной России"(П1182)

Обозначим $V_0 = W^{2,1,1}_{2,x,t,\tau}(Q)$; норма в пространстве V_0 есть стандартная норма в анизотропном соболевском пространстве, $\Delta_1(t,\tau)$ есть определитель системы

$$[1-\int\limits_0^1(1-x)K_1(x,t,\tau)dx](B_1u)(t,\tau)-\int\limits_0^1 xK_1(x,t,\tau)dx(B_2u)(t,\tau)=$$
$$=(B_1w)(t,\tau),$$
$$-\int\limits_0^1(1-x)K_2(x,t,\tau)dx(B_1u)(t,\tau)+[1-\int\limits_0^1 xK_2(x,t,\tau)dx](B_2u)(t,\tau)=$$
$$=(B_2w)(t,\tau).$$

Теорема. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t,\tau)\in C^1(\overline{Q}),\quad K_i(x,t,\tau)\in C^2(\overline{Q}),\quad i=1,2;$$
$$\Delta_1(t,\tau)\neq 0\quad \forall t\in[0,T_1],\quad \forall\tau\in[0,T_2];$$
$$f(x,t,\tau)\in L_2(Q),\quad f_\tau(x,t,\tau)\in L_2(Q).$$

Тогда краевая задача (1)-(5) имеет решение $u(x,t,\tau)$, принадлежащее пространству V_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bouziani A.* Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equation // Hiroshima Mathematical Journal, 1997. V. 27, № 3.
2. *Bouziani A.* On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems // Electronic Journal of Differential Equations, 2001. №. 21. P. 1–16.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННО–ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ[1]

FUNDAMENTAL SOLUTION OF DIFFUSION–WAVE EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVES

Мамчуев М. О.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
Нальчик, Россия
mamchuev@rambler.ru

1. Фундаментальное решение. Рассмотрим уравнение

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-96510).

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,y) - u_{xx}(x,y) + bD_{0y}^{\beta}u(x,y) + cu(x,y) = f(x,y), \qquad (1)$$

в области $\Omega = \{(x,y) : a_1 < x < a_2, 0 < y < T\}$, где D_{0y}^{ν} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования порядка ν [1, с. 9], $\alpha = 2\beta \in]0,2[$, b, c – заданные действительные числа, $f(x,y)$ – заданная действительная функция.

Функцию $v = v(x,y;t,s)$ назовем фундаментальным решением уравнения (1), если:
1) для любых фиксированных (t,s), v как функция переменных (x,y), $y > s$, удовлетворяет уравнению

$$D_{sy}^{\alpha}v - v_{xx} + bD_{sy}^{\beta}v + cv = 0;$$

2) для любой функции $q(x) \in C[a_1,a_2]$ выполняется соотношение

$$\lim_{s\to y}\int\limits_{a_1}^{a_2} D_{ys}^{\alpha-1}v(x,y;t,s)q(t)dt = q(x).$$

Примем следующие обозначения

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{|x|}^{\infty}\frac{e^{b_1\tau}}{y}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{\tau}{y^{\beta}}\right)J_0(a\sqrt{\tau^2-x^2})d\tau, \qquad (2)$$

$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(\xi)$ – функция типа Райта [2, с. 23], $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $b_1 = -b/2$, $2a = \sqrt{b^2-4c}$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Функция* $\Gamma(x-t,y-s)$, *определяемая равенством (2), является фундаментальным решением уравнения (1).*

2. Общее представление решений. Пусть $n \in \{1,2\}$ выбрано из условия $n-1 < \alpha \le n$. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовём функцию $u = u(x,y)$ из класса $D_{0y}^{\alpha-k}u \in C(\bar{\Omega})$, $1 \le k \le n$, u_{xx}, $D_{0y}^{\alpha}u$, $D_{0y}^{\beta}u \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in \Omega$.

Обозначим $\Omega_y = \{(t,s) :\ a_1 < t < a_2,\ 0 < s < y\}$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть функция* $u(x,y)$ *является регулярным в области* Ω *решением уравнения (1) и удовлетворяет краевому условию* $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-k}u(x,s) = \tau_k(x)$, $a_1 \le x \le a_2$, $k = \overline{1,n}$. *Тогда для функции*

$u(x,y)$ выполняется соотношение

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int\limits_{a_1}^{a_2}\tau_k(t)\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}G(x,y;t,0)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}\int\limits_{0}^{y}[G(x,y;a_i,s)u_t(a_i,s)-G_t(x,y;a_i,s)u(a_i,s)]ds+$$

$$+\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{0}^{y}[G(x,y,t,s)f(t,s)-u(t,s)h(x,y,t,s)]dtds,$$

где $G(x,y,t,s)=\Gamma(x-t,y-s)-V(x,y,t,s)$, $V\equiv V(x,y,t,s)$ – решение уравнения

$$\left(D_{ys}^{\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+bD_{ys}^{\beta}+c\right)V(x,y,t,s)=0,$$

из класса $V\in C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}_y)$, $\frac{\partial}{\partial t}V$, $D_{ys}^{\alpha}V\in C(\Omega\times\Omega_y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

A SPECTRAL PROBLEM WITH AN INDEFINITE METRIC IN HILBERT SPACE

Марков В. Г.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
bntr@rambler.ru

Рассматривается оператор $L=\frac{1}{g(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в весовом гильбертовом пространстве $E=L_{2,g}(-1,1)$, где $g(x)\in L_1(-1,1)$ и $xg(x)>0$ почти всюду

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы) рег. номер проекта 2.1.1/13607.

на $(-1,1)$, с нормой $\|u\|^2_{L_{2,g}(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |g(x)||u(x)|^2\,dx$. Область определения $D(L)$ оператора L состоит из функции $u(x) \in W_1^2(-1,0) \cap W_1^2(0,1)$ таких, что $Lu \in E$, $u(-1) = u(1) = 0$ и выполнены условия склеивания

$$\begin{pmatrix} u^-(0) \\ u'^-(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+(0) \\ u'^+(0) \end{pmatrix}.$$

Обозначим определитель общей матрицы склеивания через $\delta = \alpha\omega - \beta\gamma$ и будем предполагать, что $\delta \neq 0$.

Введем полуторолинейную форму, которая записывается в виде

$$[u,v] = \int_{-1}^{0} g(x)\alpha_0 u(x)\overline{v(x)}\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\beta_0 u(x)\overline{v(x)}\,dx, \qquad (1)$$

где α_0, β_0 — действительные постоянные [1].

Симметричность оператора L определяется равенством $\alpha_0\delta = \beta_0$. При этом оператор L самосопряжен при условии $\alpha + \omega = \beta + \gamma$. При выполнении этих условий рассмотрим спектральную задачу

$$Lu = \lambda u \qquad (2)$$

Теорема 1 (о разложении) [2]. *Если $\delta < 0$, то найдется эквивалентное скалярное произведение в пространстве $L_{2,g}(-1,1)$, в котором оператор L самосопряжен. При этом собственные функции спектральной задачи (2) после соответствующей нормировки образуют ортонормированный относительно этого скалярного произведения базис пространства $L_{2,g}(-1,1)$.*

В случае $\delta > 0$ полуторолинейная форма (1) уже не является скалярным произведением, а является индефинитной метрикой. Тогда симметричность оператора L и его обратимость влекут его самосопряженность уже относительно этой индефинитной метрики [3].

Спектральную задачу (2) запишем в виде

$$L_0 u \equiv g(x)\,Lu = \lambda\, g(x)\,u. \qquad (3)$$

Лемма 1. *Если $\beta\omega > 0$, то пространство H_1 совпадает с пространством функций $u \in L_2(-1,1)$ таких, что $u \in W_2^1(-1,0) \cap W_2^1(0,1)$. Если $\beta = 0$, то H_1 совпадает с пространством функций $u \in L_2(-1,1)$ таких, что $u \in W_2^1(-1,0) \cap W_2^1(0,1)$ и $u(0-0) = \alpha u(0+0)$.*

Лемма 2. (лемма 4.1 гл. 2 из [2]) *Если существует $s > 0$ такое, что $J \in L(H_s, H_s)$ $(H_s = (H_1, F_0)_{1-s,2})$, то $(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = F_0$.*

Лемма 3. *Пусть* $f(\eta)\int_0^\eta g(\tau)\,d\tau$ *и выполнено одно из следующих условий:* (a) $\forall\gamma\in(0,1)\ \exists\omega\in(0,1)$ *такое, что* $\forall\varepsilon\in(0,1)\ f(\omega\varepsilon)\le\gamma f(\varepsilon)$*;* (b) $\exists\omega\in(0,1)$ *такое, что* $f(\omega\varepsilon)\le f(\varepsilon)/2\ \forall\varepsilon\in(0,1)$*;* (c) $\exists\beta\in(0,1)$ $\exists\omega\in(0,1)$ *такое, что* $\forall\varepsilon\in(0,1)\ f(\omega\varepsilon)\le\beta f(\varepsilon)$*;* (d) *существуют постоянные* $c,d>0$ *такие, что* $f(\eta)\le c\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^d f(\xi)\quad\forall\eta,\xi\quad 0<\eta\le\xi<1$. *Тогда существует* $\theta\in(0,1)$ *такое, что* $(\overset{\circ}{W}{}^{11}_{22}(0,1),L_{2,g}(0,1))_{1-\theta,2}=(\tilde W_2^1(0,1),L_{2,g}(0,1))_{1-\theta,2}$, *где* $\tilde W_2^1(0,1)=\{u\in W_2^1(0,1):\ u(1)=0\}$.

Теорема 2. *Если* $\delta>0$ *и выполнены условия* $\alpha_0\delta=\beta_0$, $\alpha+\omega=\beta+\gamma$, *то собственные и присоединенные функции спектральной задачи* (3) *(нормированные в* H_1*) образуют базис Рисса в пространстве* H_1.

Теорема 3. *Если* $\delta>0$, *выполнены условия* $\alpha_0\delta=\beta_0$, $\alpha+\omega=\beta+\gamma$, *а в случае* $\beta=0$ *еще и одно из условий из леммы* 3, *то собственные и присоединенные функции спектральной задачи* (3) *образуют базис Рисса в пространстве* $L_{2,g}(-1,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пятков С. Г.* Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функц. анализа к задачам математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. С. 65–84.
2. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука. 1986

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

COMMUTING DIFFERENTIAL OPERATORS

Миронов А. Е.

Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
mironov@math.nsc.ru

Построены примеры коммутирующих дифференциальных операторов нескольких переменных с матричными коэффициентами. Совместные собственные функции этих операторов параметризуются точками многомерных спектральных алгебраических многообразий. В случае, когда спектральное многообразие является пересечением тэта-

дивизоров в главно поляризованном абелевом многообразии коэффициенты операторов выражаются через тэта-функцию многообразия Абеля. В случае, когда спектральное многообразие является рациональным многообразием, коэффициенты выражаются через элементарные функции.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

RESEARCH OF INVERSE PROBLEM FOR EQUATION OF THE THIRD ORDER

Николаев Н. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
nuke1987@mail.ru

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n ($\Omega \subset R^n$) с гладкой границей Γ, $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \Gamma \times (0,T)$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$. Далее, пусть $h_k(x,t)$ $(k = 1 \dots l)$, $f(x,t)$, $c(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $t_1, \dots, t_l$ — заданные числа такие, что $0 < t_1 < \dots < t_l < T < +\infty$.

Обратная задача: найти функции $u(x,t), q_1(x), \dots, q_l(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{l} q_k(x)h_k(x,t), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(x,T) = 0,\ x \in \Omega, \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3}$$

а также с условиями переопределения

$$u(x,t_k) = 0,\ k = 1, \dots, l,\ x \in \Omega. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)", рег. номер проекта 2.1.1/13607.

Пусть выполняются условия

$$f(x,0) = f_t(x,0) = f(x,T) = 0,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

$$h_k(x,0) = h_{k_t}(x,0) = h(x,T) = 0,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{6}$$

При выполнении этих условий имеют место равенства

$$u_{ttt}(x,0) = u_{tttt}(x,0) = u_{ttt}(x,T) = 0,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{7}$$

Положим в (1) $t = t_j$ $(j = 1,\dots,l)$, и пусть определитель матрицы $\{h_k(x,t_j)\}_{k,j=1}^{l}$ отличен от нуля всюду в $\overline{\Omega}$. Тогда нетрудно получить равенства

$$q_k(x,t) = \alpha_k(x) + \sum_{j=1}^{l} \beta_{k_j}(x) u_{ttt}(x,t_j),\ k = 1,\dots,l.$$

Подставляя q_k в (1), получим нагруженное уравнение

$$u_{ttt} + \Delta u - c(x)u = f_1(x,t) + \sum_{k=1}^{l} h_{1k}(x,t) u_{ttt}(x,t_k).$$

Дифференцируя трижды по t, обозначая $v = u_{ttt}$ с учетом равенства (7), приходим к следующей прямой задаче.

Прямая задача: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$v_{ttt} + \Delta v - c(x)v = g(x,t) + \sum_{k=1}^{l} \widetilde{h_k}(x,t) v(x,t_k) \tag{8}$$

такую, что для неё выполняются условия

$$v(x,0) = v_t(x,0) = v(x,T) = 0,\ x \in \Omega, \tag{9}$$

$$v(x,t)|_S = 0. \tag{10}$$

В работе доказана регулярная разрешимость полученной прямой краевой задачи (8)–(10) в пространстве $W_2^{2,3}(Q)$ [1,2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Доклады РАН, 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.
2. *Кожанов А.И.* Обратная задача определения коэффициентов поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии // Мат. заметки ЯГУ, 2008. Т. 15, вып. 2, С. 31–47.

О НЕКЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ABOUT NONCLASSIC EQUATIONS SYSTEMS IN FIRST DEGREE PARTIAL DERIVATIVE

Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ, Россия
Oshorovbb@pochta.ru.

Речь идет о линейных системах уравнений первого порядка вида

$$LU \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i(x)U_{x_i} + A(x) = F(x). \tag{1}$$

Если все матрицы $A_i,\ i = \overline{1,n}$, симметрические, причем одна из них положительно определена, такие системы названы гиперболическими. В отличие от гиперболических систем, авторами в ряде работ рассматривались краевые задачи для модельных систем вида (1), когда одна матрица была единичной, а остальные – кососимметрическими, или все матрицы были кососимметрическими [1-4] . В двумерном случае в указанный класс входит система уравнений Коши-Римана. В многомерных случаях (как по числу координатных функций, так и по числу пространственных переменных) в этот класс входит система Моисила-Теодореско и системы, возникающие при исследовании дифференцируемости кватернион-функций.

По классификации И. Г. Петровского все перечисленные системы уравнений имеют эллиптический тип. Для них однозначно разрешимы краевые задачи, которые являются аналогами задачи Римана-Гильберта с разрывными краевыми условиями для системы Коши-Римана. При этом никакая часть границы не остается свободной от граничных условий.

Оказалось, что подобная картина имеет место и для систем уравнений других типов. Например, в области $D \subseteq R^2$ будем рассматривать системы уравнений

$$L_m U \equiv AU_x + BU_y + CU = F(x,y), \tag{2}$$

где $A, B, C, F-$ $m \times m$-матрицы, заданные в области D, а $U\,(x,y)$ и $F\,(x,y)$ – соответственно искомая и заданная вектор-функции размерности $m > 2$.

Пусть $m = 3$ и

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В этом случае характеристический детерминант задается формулой

$$\det(A\lambda_1 + B\lambda_2) = \lambda_1(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2),$$

т.е. система уравнений (2), (3) по классификации Петровского не является эллиптической. Эту систему можно назвать системой составного типа.

Для канонической области $D = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 < x < k, 0 < y < l\right\}$

Задача 1. В прямоугольнике D найти решение системы уравнений (2),(3) при граничных условиях

$$u_1(x, 0) = u_1(k, y) = u_2(0, y) = u_2(x, l) = u_3(x, 0) = u_3(k, y) = 0$$

имеет однозначную разрешимость в $L_2(D)$.

В параллелепипеде $D = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : 0 < x_i < k_i,\ i = \overline{1,3}\right\}$ рассмотрим систему уравнений

$$L_1 U \equiv \sum_{i=1}^{3} B_i U_{x_i} + B(x)U = F(x), \tag{4}$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$a_i = \text{const}, \quad i = 2, 3.$

Для этой системы уравнений характеристический детерминант имеет вид

$$Q(\lambda) = -\lambda_1 \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 - a_2\lambda_2\left(\lambda_1^2 + a_3\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2\right) - a_3\lambda_3\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right),$$

что не дает возможности определить ее тип. Отметим только, что при $a_2 = a_3 = 0$ мы имеем систему составного типа.

Задача 2. В параллелепипеде D найти решение системы уравнений (4) при условиях

$$\begin{aligned} u_1\big|_{x_1=0} &= u_3\big|_{x_1=0} = u_2\big|_{x_1=k_1} = 0, \\ u_2\big|_{x_2=0} &= u_1\big|_{x_2=k_2} = u_3\big|_{(a_2 n_2<0)} = 0, \\ u_3\big|_{x_3=0} &= u_2\big|_{x_3=k_3} = u_1\big|_{(a_3 n_3<0)} = 0, \end{aligned}$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к границе Γ. Эта задача также имеет однозначную разрешимость в $L_2(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ошоров Б. Б.* О некоторых краевых задачах для систем уравнений Коши – Римана и Бицадзе // Доклады Академии Наук, 2006. Т.407, №4. С. 446–449.
2. *Ошоров Бато Б., Ошоров Батор Б.* Краевые задачи для некоторых модельных систем уравнений в трехмерном пространстве // Сборник материалов молодых ученых: Материалы международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии» / г. Улан-Удэ-Байкал. ВСГАКИ. Улан-Удэ, 2009. С. 178–186.
3. *Ошоров, Б.Б.* О некоторых модельных эллиптических системах уравнений в четырехмерном пространстве // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2003. вып.3. С. 91–98.
4. *Ошоров Бато Б.* О разрешимости одной краевой задачи для модельной эллиптической системы уравнений в четырехмерном пространстве // Вестник Бурятского государственного университета. Сер.13. Математика и информатика, 2005.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В МНОГОМЕРНОМ ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ[1]

INVERSE PROBLEM OF RECONSTRUCTING THE EXTERNAL INFLUENCE IN THE MANY-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH INTEGRAL OVERDETERMINATION

Павлов С. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
ststepmath@mail.ru

В теории обратных задач тепло- и массопереноса [1-3] часто возникают проблемы восстановления плотностей неизвестных внешних источников. Во многих случаях считают, что имеет место зависимость неизвестной правой части от времени [4]. Рассматриваемые обратные задачи в ряде случаев формулируют как проблемы управления [5].

Целью настоящей работы является исследование разрешимости обратной задачи определения внешнего воздействия для волнового уравнения.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n ($\Omega \subset R^n$) с гладкой границей Γ, $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \Gamma \times (0,T)$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$. Далее, пусть $f(x,t),\ \psi(t),\ g(x,t),\ u_0(x),\ u_1(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,T]$.

Рассмотрим обратную задачу: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u = f(x,t)q(t) + g(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ начальных условий

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

граничного условия

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, No 02.740.11.0609

а также с условия переопределения:

$$\int_{\Omega} K(x,t)u(x,t)dx = \psi \tag{4}$$

В изучаемой обратной задаче условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи, условие (4) есть условие переопределение; наличие этого условия объясняется тем, что помимо неизвестного решения $u(x,t)$, требуется найти также еще неизвестную функцию $q(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Доклады АН России, 2006. Т. 409, №6. С. 740–743.
2. *Кожанов А. И.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии // Мат. заметки ЯГУ, 2008. Т. 15, Вып.2. С. 31–47.
3. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Васильев В. И.* Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, №5. С. 119–127.
4. *Калинина Е. А.* Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный математический журнал, 2004. Т.5, №1. С. 89–99.
5. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Доклады РАН, 2000. Т. 375, №3. С.315–319.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ СИСТЕМ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА[1]

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF DEGENERATE SOBOLEV TYPE SYSTEMS

Пинигина Н. Р.

Северо-восточный федеральный университет, Якутск, Россия
n-pinig@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи для одного класса вырождающихся систем составного (соболев-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, No 02.740.11.0609

ского) типа. Для рассматриваемой задачи доказываются теоремы существования регулярных решений.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, ..., x_n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, $Q = \Omega \times (0, T)$ – цилиндрическая область, $0 < T < +\infty, S = \Gamma \times (0, T)$. Функция $f(x, t)$ имеет вид $f(x, t) = f_1(x, t) + if_2(x, t)$. Функции $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, ..., n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, действительные, заданные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Оператор A эллиптико-параболический оператор второго порядка вида

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \ \ \forall x \in \bar{\Omega}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

оператор B эллиптический оператор такого же вида

$$Bu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u, \ \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0 \mid \xi \mid^2, \ \ m_0 > 0. \tag{2}$$

Для них выполняются условия

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \ \ b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \ \ x \in \bar{\Omega}, \ \ i, j = 1, ..., n. \tag{3}$$

Первая краевая задача: найти решение уравнения

$$iAu_t + Bu = f(x, t), \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x, t) \mid_S = 0; \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \end{gathered} \tag{5}$$

В случае $A = -I$ уравнение (4) представляет собой линейное уравнение Шредингера [1], в случае же эллиптико-параболического оператора A подобные уравнения ранее не рассматривались. С другой стороны, в работах [2-4] изучались вырождающиеся уравнения вида

$$Au_t(x, t) + Bu(x, t) = f(x, t),$$

с действительнозначной функцией $f(x, t)$; техника, используемая в данной работе, близка к технике вышеуказанных работ [2-4].

Через V_0 будем обозначать анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{V_0} = \left(\int_Q (v^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j t}^2 + v_t^2) dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. *Пусть для операторов A и B выполнены указанные выше условия (1)–(3). Кроме того пусть выполняются условия*

$$f_m(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{mt}(x,t) \in L_2(Q), \;\; f_{mtt}(x,t) \in L_2(Q),$$
$$f_{mx_i} \in L_2(Q), \;\; f_{mx_i t} \in L_2(Q), \;\; m = 1, 2;$$

$$C_1 \alpha^i(x) \xi_i^2 \le a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \le C_2 \alpha^i(x) \xi_i^2, \;\; C_1 > 0, \;\; x \in \bar{\Omega}, \;\; \xi \in \mathbb{R}^n;$$
$$|a_{x_k}^{ij}(x)| \le M \sqrt{\alpha^i(x)}, \;\; x \in \bar{\Omega}, \;\; i,j,k = 1, ..., n;$$
$$a^{ij}(x) \nu_i \nu_j = 0 \quad \forall x \in \Gamma;$$
$$a_0(x) \le -\bar{a_0} < 0, \;\; b_0(x) \le -\bar{b_0} < 0 \;\; \forall x \in \bar{\Omega};$$
$$a^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \;\; b^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \;\; a_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \;\; b_0(x) \in C(\bar{\Omega}).$$

Тогда существует решение уравнения (4) удовлетворяющее условиям (5) и принадлежащее пространству V_0.

Уравнение (4) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} Au_{1t}(x,t) + Bu_2(x,t) = f_2(x,t) \\ Au_{2t}(x,t) - Bu_1(x,t) = -f_1(x,t) \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$u_1(x,t) \mid_S = 0, \quad u_2(x,t) \mid_S = 0,$$
$$u_1(x,0) = 0, \quad u_2(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

При доказательстве теоремы применяется методы регуляризации, априорных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
2. *Kozhanov A.I.* Certian classes of degenerate Sobolev–Galpern equation // Siberian Adv. Math, 1994. V. 4, №1 P. 65–94.
3. *Кожанов А.И.* О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн, 1994. Т. 35, №2. С. 359–376.
4. *Kozhanov A.I.* Composite Type Equation and Inverse Problem. Utrecht, the Netherlands, VSP, 1999.

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНОЙ МАССЫ РАСТАЯВШЕГО ВЕЩЕСТВА

ON THE CONTROL PROBLEM OF MELTED SUBSTANCE MASS AMOUNT

Подгаев А. Г.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия
pvu1707@mail.ru

Рассматривается однофазная N-мерная задача Стефана, с расширением жидкой фазы в среду с постоянной температурой равной температуре плавления (=0).

$$c_6\rho_6 u_t = div_x(k\nabla_x u) \quad Q^+ = \{(x,t) \in R^N \times [0,T] : u(x,t) > 0\}; \qquad (1)$$

$$-Lv_\nu = k(\nabla_x u, \nu^+) = k\frac{\partial u}{\partial \nu^+} \quad \Gamma_T = \{(x,t) \in \partial Q^+ : t \in (0,T)\} \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_0; \quad u = 0\Gamma_T. \qquad (3)$$

Здесь $c\rho_6 = 1$, $k = k_æ = const$– коэффициент теплопроводности жидкой фазы, L=const – скрытая удельная теплота плавления, $\overrightarrow{n} = (\nu_x, n_t)$ – нормаль к Γ_T-боковой части границы ∂Q^+, $v_\nu(x,t)$ - скорость перемещения Ω_t, сечения поверхности Γ_T=$\{(x,t) : h(x,t) = 0\}$ плоскостью t=t при фиксированном времени t в направлении нормали $\nu_x(x,t)$ в сторону твердой фазы (h>0): $v_\nu = -\frac{h'_t}{|\nabla_x h|}$.

Однако в этой задаче в условии Стефана мы считаем, что L - неизвест-ный управляющий параметр. Возникающая при этом недоопределённость компенсируется требованием, чтобы в заданный момент времени T масса (объём) растаявшей фазы достигла заданной величины.

Границу фазового перехода задаём уравнением $h(x,t) = s(x) - t = 0$, $x \in \Omega_T - \Omega_0$, $v_\nu = -\frac{1}{|\nabla_x s|}$, $\nu^+ = \frac{\nabla_x s}{|\nabla_x s|}$ и выводим равенство

$$c_æ\rho\left\{\int_{\Omega_t} u(x,t)dx - \int_{\Omega_0} u(x,0)dx\right\} = -L\left(|\Omega_t| - |\Omega_0|\right),$$

связывающее изменение энергии (расход на таяние) с изменением объёма растаявшей фазы. Оно позволяет строить итерации, определяющие $|\Omega_t|$, через $u(x,t)$.

Рассматриваются случаи, когда знание $|\Omega_t|$ позволяет определить поверхность $t = h(x)$. Например, для случая осесимметричных относительно $x = x_0$ начальных условий $u_0(x) = u_1(|x - x_0|) = u_1(r)$, получим $\Omega_t = \{(x,t) : |x - x_0| \langle R(t)\}$, $|\Omega_t| = \omega_N R^N(t)$, ω_N- объём единичного шара.

Теорема 1. *Для фиксированной (заданной) области*

$$\Omega_t^n = \{(x,t) : |x - x_0| \langle R^n(t)\}\,,\ R^n \in W_2^1(0,T)$$

вспомогательная задача

$$u_t^n = div_x(k\nabla_x u^n) \quad (x,t) \in \bigcup_{\tau\in(0,T)} \Omega_t^n \times \{\tau\}\,,$$

$u^n = 0$ *где* $|x - x_0| = R^n(t)$, $u^n(x,0) = u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1$ *имеет решение из пространства* $L_2(t; W_2^2(\Omega_t^n)) \bigcap L_2(t; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_t^n))$.

Теорема 2. *Существуют константа* $L > 0$, *функция* $R(t), R \in W_2^1(0,T)$, *определяющая область* Ω_t, *и функция* $u \in L_2(t; W_2^2(\Omega_t^n)) \bigcap L_2(t; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_t^n))$, *удовлетворяющие задаче (1)–(3) в случае осесимметричного начального условия* $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

RESEARCH OF BOUNDARY PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

Попов Н. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
popovnserg@mail.ru

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)", проект 2.1.1/13607 и Министерства образования и науки РФ, проект 02.740.11.0609.

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с нелокальными интегральными краевыми условиями

$$\int\limits_0^1 H_i(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

где $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $H_i(x,t)$ $(i = 1,2)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Псевдодифференциальными уравнениями или уравнениями Аллера (1) с нелокальными интегральными краевыми условиями (2) описывается задача расчета нестационарного движения влаги в слое почвы [1].

Краевая задача 1. Найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (2), а также начальное условие

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Умножая уравнение (1) на $H_i(x,t)$ и интегрируя по области Ω, с учетом краевых условий (2), получим вспомогательную краевую задачу.

Краевая задача 2. Найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются начальное условие (3), а также нелокальные краевые условия

$$u_{xt}(0,t) = \alpha_1(t)u_x(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t) + \alpha_3(t)u_t(0,t) + \alpha_4(t)u_t(1,t) +$$

$$+\alpha_5(t)u(0,t) + \alpha_6(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_1(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 N_1(x,t)u_t(x,t)\,dx,$$

$$u_{xt}(1,t) = \beta_1(t)u_x(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \beta_3(t)u_t(0,t) + \beta_4(t)u_t(1,t) +$$

$$+\beta_5(t)u(0,t) + \beta_6(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 N_2(x,t)u_t(x,t)\,dx,$$

где $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$ $(k = 1,\ldots,6)$, $K_l(x,t), N_l(x,t)$ $(l = 1,2)$ — заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega} = [0,1]$, $t \in [0,T]$.

Пусть V есть пространство:

$$V = \{v(x,t) : v, v_t, v_{xx}, v_{xxt} \in L_2(Q), \quad v_x \in L_\infty(0,T; W_2^1(0,1)\}$$

норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_{xxt}\|_{L_2(Q)} + \|v_x\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}.$$

В работе методом продолжения по параметру (см. [1,2]) доказывается регулярная разрешимость в пространстве V вспомогательной краевой задачи 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространстрвенных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2008. №3(62). С. 165–174.
3. *Кожанов А. И., Попов Н. С.* О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Серия Математика. Механика. Информатика, 2010. Т.10, №3. С. 63–75.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ[1]

PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGING TIME DIRECTION WITH GENERAL MATING CONDITIONS

Попов С. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
madu@ysu.ru

Рассматриваются $2n$-параболические уравнения с меняющимся направлением времени с общими условиями склеивания. Для таких задач гладкость начальных и граничных данных не обеспечивают принадлежность решения гельдеровским пространствам [1]. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи, указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Применение единого подхода при

[1]Работа выполнена в рамках реализации проекта АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы) рег. номер проекта 2.1.1/13607.

общих условиях склеивания (сопряжения) для таких уравнений дает показать, что нецелый показатель $p - [p]$ гельдеровского пространства $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения для $2n$–параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

В работах [2, 3] явно представлены условия $[p]$–разрешимости для краевых задач для $2n$–параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Для доказательства $[p]$–разрешимости при $n = 2$ и $n = 3$ были рассмотрены общие диагональные условия склеивания, более того, были найдены зависимости показателей гельдеровских пространств от весовых функций склеивания, а при $n \geq 4$ были рассмотрены непрерывные условия склеивания, включая $2n-1$–ую производную.

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы корректности краевых задач для $2n$-параболических уравнений и систем с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терсенов С.А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
2. *Попов С.В.* О гладкости решений параболических уравнений сменяющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук, 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
3. *Попов С.В., Потапова С.В.* Гельдеровские классы решений $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады Академии Наук, 2009. Т.424, №5. С. 594–596.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ON THE EQUILIBRIUM PROBLEM OF VISCOUS-ELASTIC PLATE WITH RIGID INCLUSION

Попова Т. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
ptsokt@mail.ru

Рассматривается краевая задача о равновесии вязкоупругой пластины, содержащей жесткое включение. Постановка задачи содержит интегральное условие, учитывающее воздействие внешних нагрузок на жесткую часть. Приводится эквивалентная вариационная постановка, доказана однозначная разрешимость. Далее рассмотрено семейство

вспомогательных задач, в которых область жесткого включения заменена вязкоупругой частью с положительным параметром. Доказано, что при стремлении данного параметра к нулю исходная задача с жестким включением является предельной для введенного семейства задач.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

SOLVABILITY OF INVERSE PROBLEM FOR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Прокопьев А. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
Valecl85@mail.ru

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, $S = \Gamma\times(0,T)$, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $0 < T < +\infty$, $t_1, \ldots, t_m$ – заданные точки из отрезка $[0,T]$ такие, что $0 < t_1 < \ldots < t_m \leq T$. В работе рассматривается уравнение эллиптико-параболического типа:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right) + a(x)u = f(x,t) + \textstyle\sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t), \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обратная задача I. Найти функции $u(x,t)$, $q_k(x)$ $(k = \overline{1,m})$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) и такие, что для функции $u(x,t)$ выполняются начальные и граничные условия:

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

а также условия переопределения $u(x,t_j) = 0$ при $j = \overline{1,m}$.

Обратная задача II. Найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением (1) и такие, что для функции $u(x,t)$ выполняются начальные и граничные условия (2), а также интегральное условие переопределения $\int\limits_0^T \gamma(t)u(x,t)dt = 0, \quad x \in \Omega$.

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)", рег. номер 2.1.1/13607.

Методом регуляризации доказывается существование обобщенного решения обратных задач I и II.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. ж. индустр. матем., 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ВРЕМЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

CAUCHY PROBLEM FOR MULTI-TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Псху А. В.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
Нальчик, Россия
pskhu@mail333.com

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial y_k^{\sigma_k}} u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sigma_k \in (0,1)$, $\lambda_k > 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа по переменной x, $\partial^{\sigma_k}/\partial y_k^{\sigma_k} = D_{0y_k}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}$ — оператор дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна порядка $\sigma_k = \alpha_k + \beta_k - 1$, по переменной y_k, с началом в точке $y_k = 0$, ассоциированный с последовательностью $\{\alpha_k, \beta_k\}$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна порядка $\sigma = \sum_{j=0}^{p} \gamma_j - 1$, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_j\}$, $\gamma_j \in (0,1]$, $j = \overline{0,p}$, определяется соотношением [1]

$$D_{st}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_p\}} g(t) = D_{st}^{\gamma_p - 1} D_{st}^{\gamma_{p-1}} \cdots D_{st}^{\gamma_1} D_{st}^{\gamma_0} g(t),$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-96510).

где D^{δ}_{st} — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана- Лиувилля порядка δ, с началом в точке $t = s$ по переменной t [2]:

$$D^{\delta}_{st} g(t) = \mathrm{sign}^q(t-s)\frac{d^q}{dt^q} D^{\delta-q}_{st} g(t), \quad \delta \in (q-1, q], \quad q \in \mathbb{N},$$

$$D^{0}_{st} g(t) = g(t), \quad D^{\delta}_{st} g(t) = \frac{\mathrm{sign}(t-s)}{\Gamma(-\delta)} \int_s^t g(\xi)|t-\xi|^{-\delta-1} d\xi, \quad \delta < 0.$$

Как следует из приведенного определения, производная Римана-Лиувилля и производная Капуто ($\partial^{\delta}_{st} g(t) = \mathrm{sign}^q(t-s) D^{\delta-q}_{st} g^{(q)}(t)$) могут быть выражены в терминах оператора Джрбашяна-Нерсесяна:

$$D^{\delta}_{st} = D^{\{\delta-q+1,1,\ldots,1\}}_{st}, \quad \partial^{\delta}_{st} = D^{\{1,\ldots,1,\delta-q+1\}}_{st}, \quad q-1 < \delta \le q.$$

Уравнение (1) относится к классу диффузионно-волновых уравнений. При $m = 1$ в различных формах уравнение (1) явилось предметом многочисленных исследований (см., например, [3], [4] и библиографию там).

Обозначим через $\Omega = \mathbb{R}^n \times J$, $J = (0, T_1) \times \ldots \times (0, T_m)$, J_k — внутренние точки (в $\mathbb{R}^{m-1}$) множества $\overline{J} \cap \{y_k = 0\}$, $J_{(k)} = (0, T_1) \times \ldots \times (0, T_{k-1}) \times (0, T_{k+1}) \times \ldots \times (0, T_m)$, $y_{(k)} = \{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m\}$.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $\prod_{k=1}^m y^{1-\delta_k} \cdot u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ для некоторых $\delta_k > 0$, $D^{\alpha_k - 1}_{0y_k} u \in C\left(\Omega \cup J_k\right)$, $D^{\{\alpha_k, \beta_k\}}_{0y_k} u$, $\partial^2 u / \partial x_i^2 \in C(\Omega)$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению во всех точках Ω.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y_k \to 0} D^{\alpha_k - 1}_{0y_k} u(x, y) = \tau_k(x, y_{(k)}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y_{(k)} \in J_{(k)}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (2)$$

В данной работе построено фундаментальное решение уравнения (1) и найдено представление регулярного решения задачи (1), (2). Доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР, 1968. Т. 3, № 1. С. 3–29.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

3. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Amsterdam, etc.: Elsevier, 2006.
4. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Известия РАН. Серия математическая, 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182.

ФОРМУЛА ГРИФФИТСА И ИНТЕГРАЛ ЧЕРЕПАНОВА–РАЙСА ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ[1]

GRIFFITH'S FORMULA AND CHEREPANOV–RICE'S INTEGRAL FOR A BODY WITH A CRACK AND A RIGID INCLUSION

Рудой Е. М.

Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия
rem@hydro.nsc.ru

Рассматривается плоская задача теории упругости для тела, содержащего жесткое включение и трещину, лежащую на границе между включением и упругой матрицей. Внешние силы действуют как на упругую часть тела, так и на жесткое включение, перемещения которого, в общем случае, - не нулевые. Доказана дифференцируемость целевого функционала энергии относительно малого возмущения длины трещины. Показано, что производная представима в виде инвариантного интеграла - криволинейного интеграла по достаточно гладкой незамкнутой кривой, концы которой лежат на границе жесткого включения. Производная и инвариантный интеграл являются соответствующими аналогами формулы Гриффитса и интеграла Черепанова-Райса в теории хрупкого разрушения.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-222.2010.1).

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ–ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

THE ANALOG OF PROBLEM POINCARE–TRICOMI FOR THE MIXED TYPE EQUATION OF SECOND KIND

Салахитдинов М. С.[1], **Абдуллаев А. А.**[2]

Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека
Ташкент, Узбекистан
[1]salakhitdinovms@yahoo.com, [2]akmal09.07.85@mail.ru

В данной работе впервые исследовано однозначная разрешимость аналога задачи Пуанкаре–Трикоми для уравнения эллиптико–гиперболического типа второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$sgny|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (-1 < m < 0) \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup AB$, где D^+ - ограничена кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $AB\,(y = 0)$, а D^- - ограничена тем же отрезком $AB\,(y = 0)$ и характеристиками уравнения (1).

Задача РТ. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ - является регулярным решением уравнения (1) в области D^+, а в области D^- - обобщенным решением из класса R_2;

2) выполняется условие склеивание

$$-u_y(x,-0) = u_y(x,+0)$$

3) удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\{\alpha(s)A_s[u] + \beta(s)u\}\,|_\sigma = f(s), \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

где $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $f(s)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. Причём

$$\alpha^2(s) + \beta^2(s) \ne 0, \forall s \in [0,l]$$

Отметим, что эта задача была рассмотрена в работе [1] для уравнения Лаврентьева – Бицадзе.

Теорема. *Если функция $u(x,y)$ – является решением задачи PT и выполняется условие $\alpha(s)\beta(s) \geq 0$, то она единственно.*

Сформулированная теорема о единственности решения рассматриваемой задачи доказывается с помощью принципа экстремума [2]

Для доказательства существования решения задачи в области D^+ воспользуемся решением задачи Пуанкаре построенное с помощью функции Грина [3], а в области D^- обобщенным решением видоизменноной задачи Коши [4]. После некоторых вычислений получим сингулярное интегральное уравнение в виде

$$\tau(x) - \lambda \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-tx}\right] \tau(t)dt = M(x)$$

после регуляризации полученное последнее уравнение методом Карлемана – Векуа получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности поставленной задачи [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салахитдинов М.С., Аманов Д.* Задача Пуанкаре – Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами // Сб.«Уравнения смешанного типа и задачи свободной границей», Фан, 1987. С. 3–38.
2. *Салахитдинов М. С., Уринов А.К* Вырождающиеся дифференциальные уравнения эллиптико – гиперболического типа. Ташкент: Университет, 2006.
3. *Салахитдинов М. С., Исломов Б.И.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Ташкент: Мумтоз суз, 2009.
4. *Мамадалиев Н. К.* О представлении, решения видоизмененной задачи Коши // Сиб.мат.журнал, 2000. Т. 41, №5. С. 1087–1097.
5. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. Москва: Высшая школа, 1985.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО–ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА[1]

THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ODD ORDER ELLIPTIC–PARABOLIC EQUATION WITH VARYING TIME DIRECTION

Слепцова А. Б.[1], Егоров И. Е.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]sandraslep@mail.ru

Краевые задачи для уравнений нечетного порядка по времени рассматривались в работах Егорова И. Е., Федорова В. Е. "Неклассические уравнения математической физики высокого порядка".

Постановка задачи. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим эллиптико-параболическое уравнение

$$Lu = Pu + Mu = f(x, t), \tag{1}$$

где $Pu = \sum\limits_{i=1}^{2s+1} k_i(x, t) D_t^i u$, $Mu = -\Delta u + c(x, t)u$.

Положим
$S_0^+ = \{(x, 0) : x \in \Omega, (-1)^s k_{2s+1}(x, 0) > 0\}$,
$S_0^- = \{(x, 0) : x \in \Omega, (-1)^s k_{2s+1}(x, 0) < 0\}$,
$S_T^+ = \{(x, T) : x \in \Omega, (-1)^s k_{2s+1}(x, T) > 0\}$,
$S_T^- = \{(x, T) : x \in \Omega, (-1)^s k_{2s+1}(x, T) < 0\}$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q, такое что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, t)u\right)\Big|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$D_t^j u\Big|_{\substack{t=0\\ t=T}} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u|_{\overline{S_0^+}} = 0, \quad D_t^s u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{3}$$

При этом сопряженные краевые условия имеют вид

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma(x, t)v\right)\Big|_{S_T} = 0, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, No 02.740.11.0609

$$D_t^j v\Big|_{\substack{t=0\\ t=T}} = 0, \quad j=\overline{0,s-1}; \quad D_t^s v|_{\overline{S_0^-}} = 0, \quad D_t^s v|_{\overline{S_T^+}} = 0. \qquad (5)$$

Пусть L^* оператор, сопряженный по Лагранжу к L. Через $C_L(C_{L^*})$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых функций в Q удовлетворяющим краевым условиям (2),(3)((4),(5)).

$\widehat{W}_2^{1,s+1}(Q)$ - подпространство, полученное замыканием C_L^* по норме пространства $W_2^{1,s+1}(Q)$. $\widetilde{W}_2^{1,s}(Q)$ - замыкание множества C_L по норме $\|u\|_{1,s}$.

Определение 1. Функция $u(x,t) \in \widetilde{W}_2^{1,s}(Q)$ называется обобщенным решением задачи (1)-(3), если выполнено тождество

$$a(u,v) \equiv l(u,v) + (Mu,v) = f(x,t), \quad f \in L_2(Q) \qquad (6)$$

для любой функции $v(x,t) \in \widehat{W}_2^{1,s+1}(Q)$.

Лемма. Пусть коэффициент $c(x,t) > 0$ достаточно большой, и выполнено условие

$(-1)^s[k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad \sigma(x,t) \geq 0$ на S_T.

Тогда для любой функции $u \in C_L$ имеет место оценка

$$C_1 \|Lu\| \geq \|u\|_{1,s}, \quad C_1 > 0$$

Теорема 1. *Пусть коэффициент $c(x,t) > 0$ достаточно большой, и выполнено условие $(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad \sigma(x,t) \geq 0$ на S_T. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение $u(x,t) \in \widetilde{W}_2^{1,s}(Q)$ краевой задачи (1)-(3).*

Теорема 2. *Пусть коэффициент $c(x,t) > 0$ достаточно большой, и выполнено условие $(-1)^s[2k_{2s} + (2i-2s-1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad \sigma(x) \geq 0$ на S_T,*

$$(-1)^s k_{2s}(x,0) < 0, \quad (-1)^s k_{2s}(x,T) > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,0}(Q)$ существует обобщенное решение $u(x,t)$ краевой задачи (1)-(3) такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,2s+1}(Q_\eta)$, $Q_\eta = \Omega \times (\eta, T-\eta)$, $0 < \eta < T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой: Итоги науки. Матем. анализ. - М.: ВИНИТИ, 1971.
2. *Терсенов С.А.* Параболические уравнения с меняющимся, направлением времени. - Н-ск: Наука, 1985.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973.

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ
ABOUT SMOOTHNESS OF TRICOMI PROBLEM SOLUTIONS

Спиридонова Н. Р.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
nariya@yandex.ru

Уравнения смешанного типа имеют важные приложения в трансзвуковой, газовой динамике, в безмоментной теории оболочек, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, аэродинамике. Первыми исследованиями в области уравнений смешанного типа явились работы Франческо Трикоми, опубликованные в двадцатых годах прошлого столетия. Изученная им задача стала классической и теперь известна как "задача Трикоми".

В работе рассматривается уравнение

$$sgn\, y\, |y|^m\, u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (m > 0) \tag{1}$$

в области $D \subset R^2$, которая неограничена в верхней полуплоскости $y > 0$, а в нижней полуплоскости $y < 0$ ограничена характеристиками (ξ, η):

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

$$\eta = x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Эллиптической частью уравнения (1) является верхняя полуплоскость, а гиперболической частью – характеристический треугольник.

Задача Трикоми. Найти в области D решение $u(x,\, y) \in R_1$ [1] уравнения (1) обращающееся в нуль на бесконечности и удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{y=0} = 0 \text{ при } \quad -\infty < x \leq 0, \quad 1 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u|_{\xi=0} = \psi\,(\eta) \text{ при } \quad 0 \leq \eta \leq 1, \tag{3}$$

где $\psi(\eta)$ – имеет ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем δ, причем $\psi(0) = 0$, $(\xi,\, \eta)$ – соответствующие характеристические координаты.

На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \lim_{y\to-0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \quad (0 < x < 1).$$

В работе доказано существование решения в классе R_2, более гладкой, чем R_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк., 1985.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION OF SECOND ORDER

Спиридонова С. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия

В работе рассматривается уравнение

$$y'' + \frac{2p+1}{t}y' = a^2 y = 0, y(t) \to 0, t \to \infty, \tag{1}$$

где k - некоторая вещественная постоянная.

Общее решение уравнения (1) имеет вид [3]

$$y(t) = C_1\frac{l_p(at)}{(at)^p} + C_2\frac{k_p(at)}{(at)^p}, \tag{2}$$

где C_1, C_2 -произвольные постоянные.

Рассмотрим 3 случая и для каждого из них получим оценки решения следующей краевой задачи для уравнения (1).

Краевая задача. Ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию:

$$\begin{cases} y(0) = y_0, k < 1, \\ t^{k-1}y(t)|_{t=0} = y_0, k > 1, \\ (\ln)^{-1}y(t)|_{t=0} = y_0, k = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1) $k < 1$. Краевая задача (1), (3) имеет единственное ограниченное решение

$$y(t) = \frac{y_0 2^{p+1} K_{-p}(at)}{\Gamma(-p)(at)^p}. \tag{4}$$

Из асимптотических представлений функции $K_p(z)$ получаем оценку для решения краевой задачи (1),(3)

$$|y(t)| \leq C|y_0|, t \geq 0.$$

2) $k > 1$. Краевая задача (1), (3) имеет единственное решение

$$y(t) = \frac{y_0 a^{2p} K_p(at)}{(at)^p}.$$

Из асимптотических представлений функции $K_p(z)$ получаем оценку для решения краевой задачи (1),(3)

$$t^{k-1}|y(t)| \leq C|y_0|, t \geq 0.$$

3)$k = 1$. Краевая задача (1), (3) имеет единственное решение

$$y(t) = -y_0 K_0(at).$$

Из асимптотических представлений функции $K_p(z)$ получаем оценку для решения краевой задачи (1), (3):

$$|(\ln t)^{-1} y(t)| \leq C|y_0|, t \geq 0.$$

Решение задачи (1), (3) получим методом оператора преобразования Пуассона. Допустим, что $p = -\frac{1}{2}$ уравнение (1) не имеет сингулярности. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left\{ \ y'' - a^2 y = 0, |y(t)| \to 0, t \to \infty, y(0) = \tilde{y}_0, \right. \tag{5}$$

где $\tilde{y}(t) = -\frac{y_0 2^k \sqrt{\pi}}{\Gamma(-p) a^{k-1}}$.

Нетрудно видеть, что краевая задача (5) имеет единственное решение

$$y_0(t) = \tilde{y}_0 e^{(-at)},$$

где $y(t) = -\frac{\tilde{y}_0 t^{(-p)}}{\sqrt{\pi}} (\frac{2}{a})^{-p} K_{-p}(at)$. Следовательно, решение краевой задачи (1), (3) при $p < 0$ имеет вид (4).

С помощью оператора преобразования аналогично рассматриваются случаи $p = 0$ и $p > 0$.

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATE QUASILINEAR EQUATIONS

Тарасова Г. И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
galinatarasova@yandex.ru

Метод исследования краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, основанный на теории вложения весовых функциональных пространств, впервые был предложен Л.Д. Кудрявцевым. Случай эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающего на границе ограниченной области, подробно изучался в работах С.М Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина и др. Доклад посвящен исследованию однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающегося квазилинейного оператора и изучению дифференциальных свойств решения этой задачи.

Пусть R^n - n-мерное евклидово пространство и пусть Γ_m - неограниченное многообразие размерности m, $m = 1, 2, ..., n-1$, удовлетворяющее условию конуса (см. [1]), $\Omega = R^n \backslash \Gamma_m$ и $\rho(x)$ - расстояние от точки $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ до многообразия Γ_m. Пусть функция $\varphi(t) \in C^\infty(0, \infty)$ такая, что $0 \le \varphi(t) \le 1$ для всех $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \ge 1$ и $\varphi(t) = 1$ для всех $t \in (0; \frac{1}{2}]$. Для двух вещественных чисел α, β определяется функция $\sigma_{\alpha,\beta} = \varphi(\rho(x))\rho^{-\alpha}(x) + (1 - \varphi(\rho(x)))\rho^{\beta}(x)$, где $x \in \Omega$.

Пусть $p \in (1; +\infty)$ и r - некоторое неотрицательное целое число. Определим весовой класс функций, заданных в Ω, норма которого имеет вид:

$$\|u; \overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega (\sigma_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)|)^p dx + \int_\Omega (\sigma_{\alpha,\beta}(x)|u(x)|)^p dx \right\}^{1/p}$$

Для заданных операторов $A_{kl}(|k| = |l| = r)$ таких, что $(A_{kl}\varphi)(x)$ - измеримые функции для всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ и для функционала $F \in (\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega))'$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{|k|,|l|=r} \int_\Omega (A_{kl}u)(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega). \qquad (1)$$

Предположим, что операторы A_{kl} удовлетворяют следующим условиям:

$$vrai \sup_{x\in\Omega} |(A_{kl}\varphi)(x)\sigma^{-2}_{\alpha,\beta}(x) < +\infty,$$

$$vrai \sup_{x\in\Omega} |\frac{(A_{kl}(\varphi)(x) - (A_{kl}\phi)(x)}{\sigma^2_{\alpha,\beta}(x)} \leq M\|\varphi - \phi; L^r_{2;\alpha,\beta}(\Omega)\|,$$

$$Re \sum_{|k|,|l|=r} (A_{kl}\varphi)(x)\xi^{(k)}\overline{\xi^{(l)}} \geq c\sigma^2_{\alpha,\beta}(x) \sum_{|k|=r} |\xi^{(k)}|^2$$

для всех $x \in \Omega$, $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ и для любого набора комплексных чисел $\{^{(k)}\}_{|k|\leq r}$. Положительные числа M, c не зависят от φ, ϕ, x, ξ.

Постановка задачи. Для заданного функционала $F \in (\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega))'$ требуется найти решение $u(x)$ уравнения (1), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойматов К.Х.* Описание функций из весовых классов С.Л.Соболева с нулевыми следами на C^o-многообразиях Доклады РАН, 1994. Т.339, №6. С. 727–731.
2. *Исхоков С.А.* О вариационной задаче Дирихле для вырождающегося квазилинейного уравнения в полупространстве Доклады АН Респ. Таджикистан, 2002. Т. 44, №3. С. 65–70.

ЗАДАЧА ВЕРИГИНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

VERIGIN PROBLEM FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Тахиров Ж. О.[1], Тураев Р. Н.[2]

Институт математики и информационных технологий АН РУз
Ташкент, Узбекистан
[1]prof.takhirov@yahoo.com, [2]rasul.turaev@mail.ru

В заметке рассматривается задача для квазилинейных параболиче-

ских уравнений с коэффициентами, терпящими разрыв подвижной и заранее неизвестной линии, которая является математической моделью процесса нагнетание гидротехнического раствора в грунт. Пусть в водонасыщенный грунт нагнетается упругий гидротехнический раствор. Требуется определить положение границы проникнованения раствора в грунт и распределение давлений в областях, занятых внедренным раствором оттесненной грунтовой водой.

Требуется найти пару функции $(s(t), u_i(t,x)), i = 1\bar{,}2$, удовлетворяющие уравнениям и условиям

$$a_1(u_1)u_{1t} = u_{1xx}, \quad \text{в} \quad D_1 = \{(t,x) : 0 < t \le T, \quad -l < x < s(t)\},$$

$$a_2(u_2)u_{2t} = u_{2xx}, \quad \text{в} \quad D_2 = \{(t,x) : 0 < t \le T, \quad s(t) < x < l\},$$

$$u_1(0,x) = \varphi_1(x), \quad -l \le x \le s_0 = s(0),$$

$$u_2(0,x) = \varphi_2(x), \quad s_0 \le x \le l,$$

$$u_1(t,-l) = \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u_2(t,l) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u_1(t,s(t)) = u_2(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u_{1x}(t,s(t)) = u_{2x}(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T,$$

$$\dot{s}(t) = u_{1x}(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T.$$

Исследование проводится по следующей схеме.

Сначала устанавливаются двусторонные оценки для неизвестной границы в рассматриваемой области, т.е.неизвестная граница $x = s(t)$ отстоит на положительном расстоянии от границ $x = \pm l$. Доказана единственность обобщенного решения.

Далее получены априорные оценки норм Гельдера для решении и на их основе доказаны теорема существования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости основании гидротехнических сооружений // Изв.Ан СССР. Отд.тех.наук, 1952. № 5. С. 674–687.
2. *Рубинштейн Л. И.* О решении задачи Н.Веригина // ДАН СССР, 1957. Т. 113, № 1. С. 50–53.
3. *Камынин Л. И.* Об одной задаче гидротехники // ДАН СССР, 1962. Т. 143, № 4. С. 779–782.

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

THE STATIONARY GALERKIN METHODS FOR THE SECOND ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

Тихонова И. М.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
IrinaMikh3007@mail.ru

Теория уравнений смешанного типа берет свое начало от фундаментальных исследований Ф. Трикоми и С. Геллестедта [1], где впервые были поставлены краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа на плоскости.

Затем появилось обширное количество работ и монографий, в которых с помощью метода сингулярных интегральных уравнений исследовалась разрешимость различных краевых задач для уравнений смешанного типа. В работах многих авторов [2-4] развивались функциональные методы решения краевых задач для неклассических уравнений математической физики, в частности, для уравнений смешанного типа. Отметим, что стационарный метод Галеркина [5] почти не применялся к изучению разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа. В данной работе с помощью стационарного метода Галеркина исследуется краевая задача в постановке А.Н. Терехова [4] для уравнения смешанного типа в цилиндрической области.

Построено приближенное решение по стационарному методу Галеркина и получены априорные оценки. Доказана единственность решения и однозначная регулярная разрешимость краевой задачи, причем регулярное решение задачи является пределом приближенных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
3. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
4. *Терехов А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С.128-136.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИН

SOLVABILITY OF DARBOUX PROBLEM FOR DEGENERATING MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH FOURTH DEGREE CHAPLYGIN OPERATOR

Турганбаев А. А.

Институт прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

Пусть D_0- конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная поверхностями
$|x| = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, $|x| = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$ и плоскостью $t = 0$,
$0 \le t \le t_0$; $t_0 : \frac{1}{2} = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{g(\xi)}d\xi$, где $|x|-$ длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_0 области D_0, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно.

В области D_0 рассмотрим вырождающихся многомерные гиперболические уравнения четвертого порядка с оператором Чаплыгина

$$L^2 u \equiv \left(g(t)\Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + c(x,t) \right)^2 u = 0, \quad (1)$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$ и $g(0) = 0$, $g(t) \in C((0, t_0)) \cap C^2([0, t_0])$, Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, на важность исследования которых обратил внимание еще А.В.Бицадзе [1].

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1) ([2]).

Задача 1. Найти в области D_0 решение уравнения (1) из класса $C^3(\overline{D_0}) \cap C^4(D_0)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L^j u\Big|_S = \tau_j(x), \; L^j u\Big|_{S_0} = \sigma_j(x), \; j = 0, 1, \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} L^j u\Big|_S = \nu_j(x), \; L^j u\Big|_{S_0} = \sigma_j(x), \; j = 0, 1. \quad (3)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, сохранив обозначения, использованные в [3].

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$–система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$– пространства Соболева, а $\tilde{S} = \left\{(r, \theta) \in S,\ 0 < r < \frac{1}{2}\right\}$.

Через $f^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда по сферическим функциям $Y^k_{n,m}(\theta)$ функции $f(r, \theta)$.

Введем множество функций

$$B^l_1(S) = \{f(r,\theta) : f \in W^l_2(S),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(||f^k_n(r)||^2_{C^3((0,1))} + \\ +||f^k_n(r)||^2_{C^1([0,1])})\exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l \ge m-1\}.$$

Если $a_i(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t) \in W^l_2(D_0) \cap C^1(\bar{D}_0)$, $i = 1, ..., m, l \ge m+2$, то имеет место

Теорема 1. *Если* $\tau_j(r,\theta) = r^3\tau^*_j(r,\theta),\ \nu_j(r,\theta) = r^3\nu^*_j(r,\theta), \sigma_j(r,\theta) = r^2\sigma^*_j(r,\theta),\ \tau^*_j(r,\theta),\ \nu^*_j(r,\theta) \in B^l_1(S)$, $\sigma^*_j(r,\theta) \in B^l_1(\tilde{S}), j = 0, 1,$ *то задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
2. *Protter M. H.* J.Rath. Mech. Anal., 1954. V.3, № 4. P 435–446.
3. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.
4. *Алдашев С. А.* Известия вузов. Математика, 2006, №9(532), С. 3–9.
5. *Алдашев С. А.* Математический журнал, Алматы, 2006. Т. 6, №2(20), С. 23–32.
6. *Алдашев С. А.* Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 34, № 1, С. 64–68.

ГАУССОВЫ БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

GAUSSIAN INFINITE LINEAR ALGEBRAIC EQUATION SYSTEMS

Федоров Ф. М.

ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия

Применение граничного метода [1] для решения линейных задач математической физики с краевыми условиями приводит к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В частности, решение классических и неклассических дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению, соответственно, периодических и почти периодических бесконечных систем [2], т. е. гауссовых систем.

По аналогии с конечными системами с треугольной матрицей в работе [2] введено понятие гауссовой бесконечной системы.

Определение 1. Если матрица $A = (a_{i,j})$ бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} x_i = b_j, \quad j = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

имеет элементы $a_{i,j} = 0$ для всех $i < j$, причем элементы главной диагонали не равны нулю, т.е. $a_{j,j} \neq 0$, $j = 0, 1, 2, ...$, то говорим, что такая бесконечная система линейных алгебраических уравнений (1) задана в *гауссовой форме.*

Пусть задана гауссова бесконечная однородная система:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Пусть числа $S(i)$ удовлетворяют условиям:

$$1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} S(j+k)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots . \tag{3}$$

для каждого j.

Основная теорема существования нетривиального решения произвольных однородных бесконечных гауссовых систем следующая:

Теорема. *Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения однородной гауссовой системы (2) является выполнение условий (3) для каждого j. При удовлетворении условий (3) решением системы (2) являются выражения вида:*

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=0}^{i-1} S(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

где x_0 – произвольное вещественное число, $S(k)$ удовлетворяют уравнение (3) для каждого j.

Таким образом, каждому решению $\{x_i\}_0^\infty$ гауссовой однродной бесконечной системы (2) соответствует множество чисел $\{S(j)\}$, которое может быть пустым, конечным или бесконечным. Множество чисел $\{S(j)\}$ удовлетворяет системе уравнений (3), в общем случае бесконечной.

Определение 2. Систему уравнений (3) назовем *характеристикой*, а числа $S(j)$ *характеристическими числами* соответствующего решения (4) гауссовой системы (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
2. *Федоров Ф. М.* Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ON NON-LOCAL PROBLEM FOR CHARACTERISTICLY LOADED EQUATION OF HYPERBOLIC-PARABOLIC TYPE

Хубиев К. У.

НИИ прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия
niipma@mail333.com

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение смешанного гиперболо-параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^{2-H(-y)} u}{\partial y^{2-H(-y)}} = \lambda u(x + H(-y)y, 0) \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, и характеристиками волнового уравнения $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ при $y < 0$; $\lambda = \lambda_1, y > 0$, $\lambda = \lambda_2, y < 0$, $H(y)$ – функция Хевисайда. Обозначим Ω_1, Ω_2 – параболическую и гиперболическую части области Ω соответственно, а через J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \backslash J)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, кроме того, $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала $0 < x < 1$.

Задача. Найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{i=1}^{n-j} \alpha_{n-j}^i u[\theta_{x_i}(x)] + \psi_{n-j}(x), \tag{3}$$

$$x_{n-j-1} \le x \le x_{n-j},\ x_0 = 0,\ x_n = 1,\ j = 0, 1, ..., n-1,$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_{n-j}(x)$ – заданные функции, $\theta_{x_i}(\xi)$– точка пересечения характеристики $x - y = \xi$ с прямой $x + y = x_i$, $\alpha_k^i = 0$ при $k = i$.

Задачи с нелокальным условием (3) для параболического и гиперболического типов уравнений исследованы в работах [2–4], задача с нелокальным условием (3) в гиперболической части для уравнения Лаврентьева-Бицадзе исследована в [5]. В [6] для уравнения (1) была исследована нелокальная задача с интегральным условием в гиперболической части.

В данной работе найдены условия существования и единственности решения задачи (1)–(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегродифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения, 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.

3. *Водахова В.А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения, 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
4. *Кхан М.Р.* Краевые задачи со смещением для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения, 1982. Т. 18, № 6. С. 1082–1085.
5. *Кхан М.Р.* Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения, 1984. Т. 20, № 4. С. 710–711.
6. *Хубиев К. У.* О нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума "Уравнения смешанного типа и проблемы современного анализа и информатики" и VI Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики Нальчик-Эльбрус, 12-17 мая 2008 г. С. 241–242.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH SIGN-VARIABLE CHARACTERISTIC FORM

Хуштова Ф. Г.

НИИ прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия
khushtova@ya.ru

В области $\Omega = \{(x,t) : |x| < \infty,\ t > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} x \cdot |x|^m u_{xx} - D_{0t}^{\alpha} u = f(x,y), \tag{1}$$

где D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9], $0 < \alpha \leq 1$. Уравнение (1) в области Ω является уравнением со знакопеременной характеристической формой [2, с. 69].

В работе [3] доказывается существование и единственность решения краевой задачи для уравнения (1) при $\alpha = m = 1,\ f(x,y) \equiv 0$ в полуплоскости $t > 0$ с начальным условием $u(x,0) = h(x),\ 0 < x < \infty$, где $\int\limits_0^{\infty} x^{-1} h^2(x) dx < \infty$.

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $u \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0t}^{\alpha} u$, $u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках (x, t) области Ω и для которой справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [u_x(\varepsilon, t) - u_x(-\varepsilon, t)] = 0, \ \varepsilon > 0, \ 0 < t < T.$$

Для уравнения (1) рассматривается следующая

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевому условию*

$$\lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, \tau) = \psi(x), \quad 0 < x < \infty,$$

где $\psi(x)$ – заданная функция.

В данной работе разрешимость поставленной задачи эквивалентным образом редуцируется к разрешимости интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} K(t - \eta) \varphi'(\eta) d\eta = F(t),$$

где $\varphi(t) = u(0, t)$,

$$K(t - \eta) = \int_0^{\eta} G_{\xi}(0, 0, t - \tau) d\tau, \quad G(x, \xi, t - \eta) = \frac{\partial}{\partial x} E(x, \xi, t - \eta),$$

$$E(x, \xi, t - \eta) =$$

$$= \frac{\beta \sqrt{|\xi x|}}{|t - \eta|^{1-\alpha}} \int_0^{\infty} p^2 E_{\frac{1}{\alpha}}(-|t - \eta|^{\alpha} \beta^2 p^2; \alpha) J_{\frac{1}{2\beta}}(|\xi|^{\beta} p) J_{\frac{1}{2\beta}}(|x|^{\beta} p) dp,$$

$$F(t) = \int_0^{\infty} \xi^{2\beta-2} G(0, \xi, t) \psi(\xi) d\xi - \varphi(0) t^{\alpha} \int_0^{\infty} p^{1+\frac{1}{\beta}} E_{\frac{1}{\alpha}}(-t^{\alpha} \beta^2 p^2; \alpha + 1) dp -$$

$$- \int_0^{t} \int_0^{\infty} \xi^{2\beta-2} G(0, \xi, t - \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_t^{\infty} \int_{-\infty}^{0} |\xi|^{2\beta-2} G(0, \xi, t - \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Здесь $\beta = \frac{2-m}{2}$, $E_{\frac{1}{\alpha}}(z;\alpha)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [4], $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода ν-го порядка [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Arena O.* On a degenerate elliptic-parabolic equation // Comm. in partial differential equations, 1978. 3(11). P. 1007–1040.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАВЬЕ–СТОКСА С КОНЕЧНОМЕРНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

INVERSE PROBLEMS FOR NAVIER–STOKES SYSTEMS WITH A FINITE-DIMENSIONAL OVERDETERMINATION

Чеботарев А. Ю.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
cheb@iam.dvo.ru

Пусть V и H – пара вещественных гильбертовых пространств таких, что V плотно в пространстве H, вложение V в H компактно и $V \subset H = H' \subset V'$, где H' и V' – сопряженные с H и V. Нормы пространств V и H будем обозначать через $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ соответственно; $(\cdot,\cdot)$ – отношение двойственности между пространствами V' и V и скалярное произведение в H. Следующая задача Коши для уравнения с операторными коэффициентами моделирует начально–краевые задачи для уравнений Навье–Стокса, магнитной гидродинамики и тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости.

$$y' + Ay + B[y] = f(t) + h(t), \;\; t \in (0,T), \;\; y(0) = y_0. \tag{1}$$

Здесь $y' = dy/dt$, $A = A_0 + A_1$; $A_0 : V \to V'$, $A_1 : H \to H$ – линейные непрерывные операторы, удовлетворяющие условиям:

$$(A_0 y, y) \geq \nu \|y\|^2, \;\; \nu > 0, \quad (A_0 y, z) = (A_0 z, y),$$

$$(A_0 y, z) \leq \gamma \|y\| \cdot \|z\|, \quad (A_1 y, z) \leq \mu |y| \cdot |z|, \;\; \gamma > 0, \mu > 0;$$

$B(u,v) : V \times V \to V'$ – билинейный непрерывный оператор такой, что $(B(u,v),v) = 0$; $B[y] = B(y,y)$. Функция $f : (0,T) \to V'$ и элемент $y_0 \in H$ заданы. Для постановки обратной задачи рассмотрим линейно–независимую систему функционалов $\{Q_1, Q_2, ...Q_m\}$ из V'. Обозначим через $\mathcal{V}_m$ их линейную оболочку и предположим, что функция $h : (0,T) \to \mathcal{V}_m$ неизвестна, но в каждый момент времени $t \in (0,T)$ заданы значения указанных функционалов на решении $y(t)$. Таким образом, задача заключается в отыскании функции $h = \sum_1^m \alpha_k(t) Q_k$ и соответствующего решения y задачи (1) по дополнительным данным:

$$(Q_j, y(t)) = q_j(t), \; t \in (0,T), \; j = 1, 2, ..., m. \tag{2}$$

Поставленная задача является абстрактным вариантом постановок обратных задач для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, где в качестве дополнительной информации задается конечное число моментов решения, т.е. значений определенных функционалов на решении.

Установлен результат о нелокальной разрешимости задачи (1)–(2), который позволяет доказывать существование решений различных обратных задач, включая постановки с неизвестными граничными данными. В качестве примера в работе рассмотрена задача для уравнений Буссинеска с неизвестными значениями тепловых потоков через границу. Доказана нелокальная однозначная разрешимость обратной задачи для трехмерных уравнений тепловой конвекции с неизвестной плотностью источников тепла в случае, если размерность пространства наблюдений достаточно велика и начальные данные близки к соответствующим стационарным полям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chebotarev A. Yu.* Subdifferential inverse problems for evolution Navier–Stokes systems // J. of Inverse and Ill Posed Problems, 2000. V. 8, № 3. P. 275–287.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО[1]

ABOUT SOLVABILITY OF VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH NON–LOCAL BOUNDARY CONDITION OF SAMARSKY

Шадрина А. И.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
shadrina_ai@mail.ru

Исследование пространственно нелокальных краевых задач привлекает внимание многих специалистов по теории дифференциальных уравнений в частных производных [1].

Работа представляет собой исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных линейных параболических уравнений с меняющимся направлением времени с граничным условием А.А. Самарского и с постоянными коэффициентами.

В области $Q = (0 < |x| < 1) \times (0, T)$ рассматривается параболическое уравнение с меняющимся направлением времени

$$u_t \mathrm{sgn} x = u_{xx} \tag{1}$$

Решение $u(x,t)$ уравнения (1) ищется из пространства Гёльдера $H_{x\ \ t}^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q)$, для которой выполняются начальные условия

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x),\ x < 0, \tag{2}$$

пространственно нелокальные краевые условия А.А. Самарского

$$\begin{aligned} u(-1,t) &= \alpha_1 u_x(-1,t) + \alpha_2 u(1,t) + f_1(t), \\ u_x(1,t) &= \beta_1 u_x(-1,t) + \beta_2 u(1,t) + f_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

условия склеивания

$$\begin{aligned} &u(-0,t) = u(+0,t), \\ &u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad 0 < t < T, \end{aligned} \tag{4}$$

где α_i, β_i — постоянные, $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — заданные функции.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, No 02.740.11.0609

$$L(\varphi_1, \varphi_2, f_1, f_2) = 0, s = 1.... \tag{5}$$

Теорема. *Пусть* $l = 1$

1. $\varphi_1(x) \in H^{2+\gamma}(0, +\infty), \varphi_2(x) \in H^{2+\gamma}(-\infty, 0), f_1(t) \in H^{1+\frac{\gamma}{2}}(0, T)$ $f_2(t) \in H^{1+\frac{\gamma}{2}}(0, T)(\gamma \in (0, 1))$*;*

2. если $\alpha_1 \neq 0$*, то выполнены условия* $0 < \gamma < \delta$*,* $\delta = min(1 - 2\theta_1, 2\theta_1), \theta_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{A}{B}$*;*

3. если $\alpha_1 = 0$*, то выполнены условия* $A \cdot B > 0, A \cdot B \cdot \beta_1 \geq 0, A \cdot B \cdot \beta_2 \leq 0, \alpha_2 \leq 0$*,* $0 < \gamma < \delta$*,* $\delta = min(1 - 2\theta_1, 2\theta_1, 1 - 2\theta_2, 2\theta_2), \theta_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{A}{B}, \theta_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha_2 \beta_1$*.*

Тогда при выполнении условий вида (5) существует единственное решение краевой задачи (1)-(4) из пространства $H_{x\ \ t}^{2l+\gamma, l+\frac{\gamma}{2}}(Q)$*.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2008. №3(62). С.165–174.

Секция II. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

THE GAME THEORY IN ONLINE ADVERTISING

Akimov F. R.

North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia
fat_32_2001@mail.ru

The Game Theory is a branch of applied mathematics that is used in the social sciences, most notably in economics, as well as engineering, political science, international relations, computer science and management. Game theory attempts to mathematically capture behavior in strategic situations, or games, in which an individual's success in making choices depends on the choices of others. Consider online advertising, which is based on principles from algorithmic game theory and online auctions. The Internet has enabled advertising that is more segmented and measurable, making it more efficient than traditional advertising channels, such as newspaper classifieds, radio spots, and television commercials. These measurements have led to better pricing models, which are based on online real-time auctions. The original Internet auctions were designed by the industry, based on basic economic principles which have been known and appreciated for forty years.

In the past two decades, we have seen the Internet grow from a scientific network to an economic force that positively affects the global economy. E-commerce, online advertising, social networks and other new online business models present fascinating research questions and topics of study that can have a profound impact on society. One of important part of online advertising is sponsored search.

Sponsored search is a form of advertising typically sold at auction wheremerchants bid for positioning alongside web search results. For example, when a user queries a web search engine like Google or Yahoo! for«iPod», advertisers (Apple Computer, Best Buy, eBay, etc.) may bid to have their listings featured alongside the standard «algorithmic» search listings. The advertisements appear in a separate section of the page designated as «sponsore» above or to the right of the algorithmic results. The sponsored search results are displayed in a format similar to algorithmic results: as a list of items each containing a title, a text description, and a hyperlink to a

corresponding web page. We call each position in the list a slot. Generally, advertisements that appear in a higher ranked slot (higher on the page) garner more attention and more clicks from users. Thus, all else being equal, merchants generally prefer higher ranked slots to lower ranked slots.

Advertisers bid for placement on the page in an auction-style format where the larger their bid the more likely their listing will appear above other ads on the page. By convention, sponsored search advertisers generally pay perclick, meaning that they pay only when a user clicks on their ad, and do not pay if their ad is displayed but not clicked. Overture Services, formerly GoTo.com and now owned by Yahoo! Inc., is credited with pioneering sponsored search advertising. Overture's success prompted a number of companies to adopt similar business models, most prominently Google, the leading web search engine today. Sponsored search is one of the fastest growing, most effective and profitable forms of advertising, generating roughly 7 billion in revenue in 2005 after nearly doubling every year for the previous five years.

REFERENCES

1. *Christian Borgs, Jennifer Chayes, Nicole Immorlica, Mohammad Mahdian and Amin Saberi.* Multi unit auctions with budget constrained bidders.In Proceedings of the 6th ACM Conferenceon Electronic Commerce . Vancouver: BC, 2005.
2. *Bala Kalyanasundaram and Kirk R.Pruhs.* An optimal deterministic algorithm for online b-matching // Theoretical Computer Science, 2000.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ БУЛЕВОЙ МОДЕЛИ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

FIXED FUNCTIONING POINTS OF GENE NETS BOOLEAN MODEL

Архипова А. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
Anna.Ark.Arkhipova@gmail.com.

В математической постановке генная сеть представляется в виде связного ориентированного графа $G(U, D)$, где U – множество вершин, которые отождествляются с белками, а D – множество дуг, имеющих смысл отрицательных регуляторных связей. Вершины нумеруются натуральными числами и каждой вершине i приписывается вес

$x_i \in \{0,\ldots,p\text{-}1\}$, который определяет концентрацию белка. Различают аддитивный и мультипликативный механизмы регулирования активности синтеза белков. Функционирование генной сети характеризуется изменением концентрации ее веществ, которое задается функцией $A_G(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ действия автомата A_G на заданный набор весов $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_{2n})$. Задача: найти неподвижные точки аддитивного (мультипликативного) автомата, то есть такие наборы весов вершин, которые под действием отображения A_G остаются неподвижными.

В работе проведено описание неподвижных точек аддитивного и мультипликативного автоматов, действующих на орграфах $G(n,k)$ и $H(n,k)$. Они состоят из двух ориентированных контуров, на каждом из которых расположено по n вершин. Между вершинами внутреннего и внешнего контуров есть ориентированные связи. Каждая вершина имеет k –1 входов и столько же выходов. При различных ориентациях контуров имеем два семейства графов $G(n,k)$ и $H(n,k)$.

В [1] изучалась модель циркулянтных графов $G(n,k)$ и доказана теорема о неподвижных точках.

В данной работе доказан (n,k) критерий для автоматов, определенных на $H(n,k)$.

Теорема. *Аддитивный (мультипликативный) автомат, определенный на $H(n,k)$, имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда 2n кратно k и k – четное.*

Найден вид неподвижных точек и их количество.

Наличие неподвижных точек автоматных отображений означает возможность генной сети находиться в устойчивых стационарных состояниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник ТГУ, 2005. №14. С. 206–212.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ КОДИРОВАНИЕ ДЛИН СЕРИЙ ДЛЯ ИСТОЧНИКОВ С МАЛОЙ ЭНТРОПИЕЙ

UNIVERSAL RUN-LENGTH ENCODING FOR LOW-ENTROPY SOURCES

Бакулина М. П.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

marina@rav.sscc.ru

Задача кодирования источников с малой энтропией хорошо известна в теории информации, так как для таких источников существуют более простые методы кодирования, чем для произвольных источников. В работе К. Шеннона [4] впервые была рассмотрена наиболее известная схема сжатия источников с малой энтропией, получившая название "кодирование длин серий". Различные методы кодирования низкоэнтропийных источников с известной и неизвестной статистикой предложены также в работах [3, 5]. Однако известные методы кодирования источников с малой энтропией не позволяют строить коды с любой наперед заданной избыточностью, которая определяется разностью между средней длиной кодового слова и энтропией. В данной работе предлагается новый эффективный метод кодирования длин серий для источников с малой энтропией, позволяющий достигать любой наперед заданной избыточности и обладающий небольшим объемом памяти и небольшим средним временем кодирования и декодирования.

Пусть дан бернуллиевский источник с малой энтропией, порождающий последовательность нулей и единиц с вероятностями $p(0)$ и $p(1)$, причем эти вероятности неизвестны. Наша задача - построить эффективный алгоритм кодирования таких источников, позволяющих достигать наперед заданной избыточности r. В предлагаемом методе кодирование осуществляется в два этапа, где на первом и втором этапах используется конструкция мнимого скользящего окна (см. [1]). Так как последовательность, порождаемая источником, состоит из длинных серий 0, то на первом этапе можно добиться существенного сжатия поступающих входных данных. Для этого разобьем входную последовательность на блоки длины l_t, определяемой на основе статистики окна $x_{t-\omega} \dots x_{t-1}$. Кодирование каждого очередного блока осуществляется на основе статистики, содержащейся в предыдущем окне. Если блок состоит из одних нулей, то его кодом является 0, иначе длина кодового слова равна $l_t + 1$: началом его является 1, за которой следует

тот же блок длины l_t. Затем сдвигаем окно на l_t символов вправо и на основе статистики полученного окна аналогичным образом кодируем следующий блок. На втором этапе кодирования решается задача достижения заранее заданной избыточности. Этого можно добиться за счет применения к полученной после первого этапа сокращенной последовательности преобразованных данных какого-либо известного адаптивного кода. Для этой цели мы использовали адаптивный арифметический код из [2] как наиболее эффективный метод универсального кодирования. Отметим, что применение мнимого скользящего окна позволяет не хранить в памяти кодера и декодера само окно, и следовательно, существенно уменьшить объем памяти кодера и декодера по сравнению с методом, используюшим обычное скользящее окно.

Можно показать, что с вероятностью 1 общая избыточность предложенного кода не превосходит r , и при $r \to 0$ общий объем памяти кодера и декодера V и среднее время кодирования и декодирования одного символа T удовлетворяют неравенствам

$$V < C_1 \log(1/r), \quad T < C_2 \sqrt{p} \log(1/rp) \log\log(1/rp) \log\log\log(1/rp) + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3- константы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябко Б. Я.* Сжатие данных с помощью "мнимого скользящего окна"// Проблемы передачи информации, 1996. Т. 32, № 2. С. 22–30.
2. *Ryabko B. Ya, Fionov A. N.* Homophonic coding with logarithmic memory size // Algorithms and Computation.Berlin: Springer, 1997. P. 253–262.
3. *Tanaka H., Leon-Garsia A.* Efficient run-length encodings // IEEE Trans. Inform. Theory, 1982. V.IT-28, № 6. P. 880–890.
4. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М:Изд-во иностр. литературы, 1963.
5. *Штарьков Ю. М., Бабкин В. Ф.* Кодирование длин серий в условиях априорной неизвестности // Аппаратура для космических исследований. М: Наука, 1973. С. 3–9.

АЦИКЛИЧЕСКАЯ РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ ЗАДАЧИ[1]

ACYCLIC COLORING OF PLANAR GRAPHS AND RELATED PROBLEMS

Бородин О. В.[1], Иванова А. О.[2]

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН и Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
brdnoleg@math.nsc.ru

[2] *ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ» и Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
shmgnanna@mail.ru

Дается обзор по ациклической и предписанной ациклической раскраскам плоских графов.

Определение. Правильная вершинная раскраска графа называется ациклической, если каждый цикл окрашен не менее чем тремя цветами.

Ациклическая раскраска оказалась полезной при получении результатов в задачах о других типах раскраски. В 1976 г. О. В. Бородин доказал гипотезу Б. Грюнбаума о том, что каждый плоский граф ациклически 5-раскрашиваем. Оценка 5 неулучшаема и достигается даже на 2-вырожденных графах без нечетных циклов (А. В. Косточка и Л. С. Мельников, 1976).

Определение. Граф называется предписанно k-раскрашиваемым, если из любых множеств допустимых цветов мощности не менее k на его вершинах можно выделить правильную раскраску.

Этот вид раскраски, введенный в 1976 г. В. Г. Визингом, а в 1979 г. независимо П. Эрдешем и др., вызывает большой интерес у специалистов. В 1994 г. М. Фогт построила плоский граф, который не является предписанно 4-раскрашиваемым, а К. Томассен показал, что 5 цветов для предписанной раскраски достаточно. Первый из этих фактов контрастирует с широко известной теоремой о том, что каждый плоский граф 4-раскрашиваем (К.Аппель и В.Хакен, 1976), а второй является решением известной проблемы, впервые поставленной в 1975 г. В. Г. Визингом на конференции в Одессе.

[1]Работа авторов поддержана грантами РФФИ 09-01-00244 и 08-01-00673.

В 2002 г. О. В. Бородин и др. доказали, что каждый плоский граф предписанно ациклически 7-раскрашиваем и высказали предположение, что 5 цветов для ациклической предписанной раскраски достаточно. Однако эта гипотеза очень трудна. Ряду зарубежных авторов ранее удалось подтвердить ее только для некоторых узких классов плоских графов: без 3- и 4-циклов, без 4- и 5-циклов, или без 4- и 6-циклов, для графов без 4-циклов и хордальных 6-циклов, для графов без 4-циклов и без 3-циклов на расстоянии менее 3 друг от друга, а также для графов без 4-циклов и пересекающихся 3-циклов. Также было доказано, что плоские графы без 4-циклов предписанно ациклически 6-раскрашиваемы. Совместное усиление перечисленных результатов получено нами в 2010 г. (в печати): каждый плоский граф без 4-циклов предписанно ациклически 5-раскрашиваем.

Ранее были также известны достаточные условия ациклической 4- и 3-раскрашиваемости плоских графов (как обычной, так и предписанной). В этом направлении нами (частично в соавторстве с зарубежными коллегами) также получены результаты, усиливающие целый ряд ранее известных результатов. Приведем лишь три примера. В [2] доказана предписанная ациклическая 4-раскрашиваемость при отсутствии 4-циклов и треугольных 6-циклов (т.е. смежных с 3-циклами). Для предписанной ациклической 3-раскрашиваемости достаточно выполнения любого из условий: (i) нет циклов длины меньше 7 (см. [1]) или (ii) циклов длиной от 4 до 11 (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borodin O. V., Chen M., Ivanova A. O., and Raspaud A.* Acyclic 3-choosability of sparse graphs with girth at least 7 // Discrete Math., 2010. V. 310, № 17 – 18. P. 2426–2434.
2. *Borodin O. V., Ivanova A. O., and Raspaud A.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor triangular 6-cycles // Discrete Math., 2010. V. 310, № 21. P. 2946–2950.
3. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 3-choosability of planar graphs with no cycles of length from 4 to 11 // Sib. Elektron. Mat. Izv., 2010. № 7. P. 275–283.

ИНЪЕКТИВНАЯ И 2-ДИСТАНЦИОННАЯ РАСКРАСКИ РАЗРЕЖЕННЫХ ПЛОСКИХ ГРАФОВ[1]

INJECTIVE AND 2-DISTANCE COLORINGS OF SPARSE PLANAR GRAPHS

Бородин О. В.[1], Иванова А. О.[2]

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН и Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
brdnoleg@math.nsc.ru

[2] *ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ» и Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
shmgnanna@mail.ru

Определение. Вершинная раскраска графа G называется инъективной, если любые две вершины, между которыми существует цепь длины 2, получают разные цвета.

Инъективная раскраска находит применение в теории сложности и теории кодирования. Отметим, что при инъективной раскраске не требуется, чтобы соседние вершины красились в разные цвета, и в этом состоит единственное отличие ее от 2-дистанционной раскраски. Последняя изучается в теории графов уже более 30 лет, а такое ее обобщение, как (p, q)-раскраска является одной из наиболее естественных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования.

В 1977 г. Вегнер предположил, что для любого плоского графа справедливы следующие утверждения: $\chi_2 \leq 7$, если $\Delta = 3$; $\chi_2 \leq \Delta + 5$, если $4 \leq \Delta \leq 7$; $\chi_2 \leq \lfloor (3\Delta)/2 \rfloor + 1$ в противном случае.

Были получены следующие верхние оценки: $\lfloor (9\Delta)/5 \rfloor + 2$ при $\Delta \geq 749$ Агнарсоном и Холдорсоном (2000, 2003) и $\lceil (9\Delta)/5 \rceil + 1$ при $\Delta \geq 47$ Бородиным и др. (2001). Наилучшие из известных верхних оценок при больших Δ принадлежат Молою и Салаватипуру (2002, 2005): $\lceil (5\Delta)/3 \rceil + 78$ при всех Δ и $\lceil (5\Delta)/3 \rceil + 25$ при $\Delta \geq 241$.

Определение. Граф называется предписанно k-раскрашиваемым, если из любых множеств допустимых цветов мощности не менее k на его вершинах можно выделить правильную раскраску. Минимальное число цветов в предписанной инъективной (2-дистанционной) раскрасках графа G, называется его инъективным (2-дистанционным) хроматическим числом и обозначается $\chi_i^l(G)$ ($\chi_2^l(G)$).

[1] Работа авторов поддержана грантами РФФИ 09-01-00244 и 08-01-00673.

Ясно, что $\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$ для любого графа G. Бородиным и др. (2004) были получены достаточные условия (в терминах обхвата (длина минимального цикла в графе) g, и максимальной степени Δ) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta + 1$. В частности, было устанавлено, что минимальное g такое, что $\chi_2 = \Delta + 1$, если Δ достаточно велико (в зависимости от g), равно 7. Другими словами, существуют плоские графы с $g \leq 6$ такие, что $\chi_2 = \Delta + 2$ для произвольно больших Δ. В 2007 г. эти результаты были перенесены нами на предписанную 2-дистанционную раскраску. Дворжак и др. (2008) показали, что каждый плоский граф с $\Delta \geq 8821$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_2 \leq \Delta + 2$; нами в 2009 г. ограничение на Δ было понижено до 18, а в предписанном случае — до 24.

По сравнению с 2-дистанционной раскраской, инъективная раскраска плоских графов изучена гораздо меньше. Легко привести пример плоского графа с $g = 4$ и произвольным четным Δ, имеющего $\chi_i = \frac{3}{2}\Delta$. Ясно, что любой граф G имеет $\chi_i(G) \geq \Delta(G)$, поэтому кажется естественным попытаться описать плоские графы, имеющие $\chi_i^l = \chi_i(G) = \Delta(G)$. Для плоских графов известны следующие достаточные условия: $\Delta \geq 71$ и $g \geq 7$ (Бу и др., 2009), $\Delta \geq 4$ и $g \geq 13$ (Кренстон и др., 2010), $\Delta \geq 3$ и $g \geq 19$ (Лузар и др., 2010).

В [1] доказано, что $\chi_i^l = \Delta$ в каждом из следующих случаев: $\Delta \geq 16$ и $g = 7$, $\Delta \geq 10$ и $8 \leq g \leq 9$, $\Delta \geq 6$ и $10 \leq g \leq 11$, а также $\Delta = 5$ и $g \geq 12$. В [2] получены аналогичные условия для 2-дистанционной $(\Delta + 1)$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом не менее 7. С другой стороны, нечетный цикл C_{2n-1} имеет $\chi_i(C_{2n-1}) = \Delta(C_{2n-1}) + 1 = 3$ (и произвольно большое g), и существует граф, имеющий $g = 6$ и $\chi_i(G) = \Delta + 1$ при произвольно большой Δ. В [1] также доказано, что каждый плоский граф с $\Delta \geq 24$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_i^l \leq \Delta + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* List injective colorings of planar graphs // Discrete Math., 2011. V. 311, № 2–3. P. 154–165.
2. *Иванова А. О.* Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска плоских графов с обхватом не менее 7 // Дискрет. анализ и исслед. операций, 2010. Т. 17, № 5. С. 22–36.

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ m-МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n

TO DIFFERENTIAL GEOMETRY OF n-DIMENSIONAL MANIFOLD OF m-DIMENSIONAL PLANES OF PROJECTIVE SPACE P^n

Бубякин И. В.

Северо-Восточный федеральный университет и ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия
bubyakiniv@mail.ru

В проективном пространстве P^n рассмотрим n-параметрические семейства m-мерных плоскостей, т.е. n-мерные многообразия M^n грассманова многообразия $G(m,n)$. Многообразию M^n при грассмановом отображении [1] соответствует n-мерное многообразие V^n, лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$, являющемся образом многообразия $G(m,n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n. В каждой своей точке l, соответствующей m-мерной плоскости L проективного пространства P^n, многообразие V^n имеет n-мерную касательную плоскость T_lV^n.

Два гиперконуса Φ_1 и Φ_2 второй степени с $(n-2)$-мерными образующими в пространстве P^n называются сцепленными, если они имеют общую образующую и не лежат в одной $(n-1)$-мерной плоскости. Несколько гиперконусов в пространстве P^n называются сцепленными, если они попарно сцеплены и $(n-2)$-мерные плоскости сцепления на каждом из них принадлежат одному семейству образующих. Сцепление называется невырожденным, если каждая $(n-2)$-мерная плоскость сцепления принадлежит лишь двум гиперконусам или $(n-2)$-мерные плоскости сцепления различных пар гиперконусов Φ различны.

Рассмотрим n-мерные многообразия M^n, для которых сечения многообразия Сегре $S_l(m,n-m-1)$ [2] $(n-1)$-мерной плоскостью PT_lV^n представляет собой алгебраическое многообразие Q^*, являющееся пересечением $m(n-m-1)$ невырожденно сцепленных гиперконусов второй степени. Обозначим такие n – мерные многообразия через Q^n. Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Многообразие характеристических $(m-1)$-мерных плоскостей торсов, принадлежащих многообразию Q^n, представляет собой тангенциальную рациональную нормкривую степени m.*

Теорема 2. *Многообразие характеристических* $(m+1)$*-мерных плоскостей торсов, принадлежащих многообразию* Q^n*, представляет собой конус с* m*-мерной вершиной* L *и направляющей рациональной нормкривой степени* $n-m-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North–Holland, 1993.
2. *Акивис М.А.* К дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor, 1982. V.38. P. 273–282.

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА МЕТРИКИ КАЛАБИ–ЯУ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ[1]

NEW EQUATION ON THE LOW DIMENSIONAL CALABI -YAU METRICS

Егоров Д. В.

Северо–Восточный федеральный университет и ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия
egorov.dima@gmail.com

В данной работе мы получим уравнение на метрики компактных кэлеровых многообразий в размерностях 2 и 3, решением которого будут метрики Калаби–Яу. Данное уравнение отличается от уравнения Монжа–Ампера, рассмотренного Калаби и Яу [1], [2].

Мы доказываем существование решения введенного уравнения в комплексных размерностях 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Calabi E.* On Kähler manifolds with vanishing canonical class // Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefshetz, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957. P. 78–89.
2. *Yau S.-T.* On the Ricci curvature of compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation, I // Comm. on pure and appl. math., 1978. V. 31, P. 339–411

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00598-а), грантом поддержки ведущих научных школ НШ-7256.2010.1

О РАЗБИЕНИИ МНОЖЕСТВА ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ n ОБЪЕКТОВ МЕЖДУ n УЧАСТНИКАМИ

ON THE PARTITION OF A SET OF OBJECTS IN THE PROBLEM OF THE DISTRIBUTION OF n OF OBJECTS AMONG n PARTICIPANTS

Егоров Р. И.[1], **Кайгородов С. П.**[2]

Северо–Восточный федеральный университет и ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия
[1]eri0208@mail.ru, [2]spkay@mail.ru

В работе рассматривается одна задача распределения множества объектов между множеством участников, которая относится к так называемым задачам дележа ресурсов [1]. Работа продолжает исследования авторов по задачам распределения [2], [3].

Пусть имеем n объектов, которые должны быть распределены между n участниками ($n \in N$, $n > 1$). Множество всех объектов (участников) обозначим через X (Y). Каждый участник $i \in Y$ получает только один объект, но имеет право указать перед распределением множество $x_i \subseteq X$ такое, что получение для участника i любого объекта из этого множества являлось бы для него благоприятным исходом распределения объектов из X среди участников из Y. Если участник i не может определиться с множеством x_i, то $x_i = X$. Для любого объекта $j \in X$ обозначим через y_j множество всех участников $i \in Y$ таких, что $j \in x_i$. Пусть

$$Z \rightleftharpoons \bigcup_{i \in Y} x_i.$$

Таким образом, имеем n множеств заявок

$$x_i \in 2^X \setminus \varnothing, \quad (i = \overline{1, n}),$$

которые отражают интересы участников распределения.

Под распределением объектов из $\widetilde{X}$ между участниками из $\widetilde{Y}$ понимается любое отображение

$$r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X},$$

где каждому участнику из $\widetilde{Y}$ соответствует один объект из $\widetilde{X}$ и

$$(\forall i, j \in \widetilde{Y})(r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}(i) \neq r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}(j)), \quad \widetilde{X} \subseteq X, \quad \widetilde{Y} \subseteq Y.$$

Множество всех таких отображений (2) обозначим через $R_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}$. Если $r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}(i) \in x_i$, то будем говорить, что участник $i \in \widetilde{Y}$ выиграл при распределении $r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}} \in R_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}$. В противном случае - проиграл. Распределение $r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}$ назовём выигрышным, если все участники из $\widetilde{Y}$ выиграли. Выигрышное распределение $r_{\widetilde{Y},\widetilde{X}}$ назовём максимальным, если не существует выигрышного распределения $r_{\widetilde{\widetilde{Y}},\widetilde{X}}$ такого, что $|\widetilde{\widetilde{Y}}| > |\widetilde{Y}|$.

В общем случае может не существовать выигрышного распределения $r_{Y,X}$.

Доказаны теоремы о максимальном выигрышном распределении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Экланд И.* Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
2. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П.* Об одной задаче распределения с жеребьевками // Мат. заметки ЯГУ, 2006. Т. 13, № 1. С. 67–71.
3. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П.* Об одной задаче жеребьевки для связанных множеств участников и объектов распределения // Мат. заметки ЯГУ, 2010. Т. 17, № 1. С. 18–21.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХАГЕНТНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ[1]

NUMERICAL SOLVING OF THREE-AGENT DIFFERENTIAL GAME

Лукин В. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
wfilin@yandex.ru

В работах [1, 2] была исследована диффузионная конфликтная модель экономики производства и потребления со многими участниками, являющаяся динамическим аналогом олигополии Курно. Доказано существование ситуации ε-равновесия в рассматриваемом диффузионном конфликтном процессе, который формализуется многоагентной дифференциальной игрой.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, №02.740.11.0609

В данной работе рассматривается бескоалиционная трехагентная дифференциальная игра с фиксированной продолжительностью T, формализующая динамическую модель олигополии Курно в случае 3 агентов. Каждый агент (предприятие) выпускает однотипный товар и занимается реализацией и распространением товара в некотором экономическом регионе. Агенты преследует цель достижения максимального суммарного дохода от реализации своей продукции за конечный период времени T.

Динамика агентов в рассматриваемой дифференциальной игре описывается начально-краевой задачей для уравнения диффузии, существование ситуаций ε-равновесия в игре в классе стратегий кусочно-программного типа следует из результатов работ [1,2]. В данной работе приводятся результаты численного решения рассматриваемой бескоалиционной трехагентной дифференциальной игры. Численный метод основан на использовании метода динамического программирования в сочетании с конечно-разностным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малафеев О. А.* Управляемые конфликтные системы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000
2. *Троева М. С., Малафеев О. А.* Равновесие в диффузионной конфликтной модели экономики со многими участниками // Вопр. мех. и процессов управления. Вып. 22. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. С. 146–153.

РЕШЕНИЕ СЛАБОФОРМАЛИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ЛОГИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

SOLUTION OF WEAK-FORMALIZED PROBLEMS BY METHODS OF LOGIC DIFFERENTIATION

Лютикова Л. А.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
Нальчик, Россия
niipma@mail333.com

Логическое дифференциальное и интегральное исчисления являются направлениями современной дискретной математики и находят свое применение в задачах динамического анализа и синтеза дискретных цифровых структур.

Булева производная по некоторым своим свойствам является аналогом производной в классическом дифференциальном исчислении

Определение 1. Производная первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ от булевой функции $f(x_{1,...}x_n)$ по переменной x_i есть сумма по модулю 2 соответствующих остаточных функций:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1..x_{i-1}, 0, x_{i+1}..., x_n) \oplus f(x_1..x_{i-1}, 1, x_{i+1}..., x_n)$$

Определение 2. Весом производной $P(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ от булевой функции называется число конституент "1" этой производной.

Утверждение 1. *Чем больше вес производной, тем больше функция $f(x_{1,...,}x_n)$ зависит от переменной x_i.*

Определение 3. Смешанной производной k-го порядка от булевой функции $f(x_{1,...}x_n)$ называется выражение вида:

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x_1...x_k)} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1...\partial x_{k-1}}\right);$$

При этом порядок фиксированной переменной не имеет значения. Производная k-го порядка определяет условия, при которых эта функция изменяет свое значение при одновременном изменении значений $x_1 \ldots x_k$.

Определение 4. Функция $f\ (x_{1,...,}x_n)$ называется симметричной если $f(x_1, ..., x_n) = f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$.

Свойство 1. Пусть $f(x_1..x_{i-1}, x_i, x_{i+1}..., x_n)$ булева функция от n переменных, $k \leq n$, $\frac{\partial f^k}{\partial x_{1....}\partial x_k} \neq 0$, тогда $(x_1..x_{i-1}, x_i, x_{i+1}..., x_k)$ - существенные переменные.

Свойство 2. Для булевой функции $f(x_1..x_{i-1}, x_i, x_{i+1}..., x_n)$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$.

Свойство 3. $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i} \vee x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i} \vee \overline{x}_i) = \frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}$

Определение 5. Пусть $g = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ производная функции f по переменной x_i, тогда существует функция $\int g dx_i$, называемая булевым интегралом функции g, такая, что: $\int g dx_i = x_i g \oplus h$, где h является произвольной булевой функцией переменных $x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n$.

Теорема 1. *Любая булева функция$f(x_1....., x_n)$ может быть получена в результате n-кратного логического интегрирования константы{0}.*

$$\int(..(\int C dx_1)...)dx_n = f(x_1, ..., x_n)$$

Совершенные нормальные дизъюнктивные формы хотя и дают однозначные представления функции, но являются очень громоздкими. Реализация СДНФ программно или схемотехнически является избыточной, что ведет к увеличению программного кода, поэтому существуют методы упрощения логической записи – минимизации.

При этом следует учесть, что ни один из способов минимизации не универсален.

Теорема 2. *Пусть задана булева функция* $f(x_1.....,x_n)$, *тогда*

$$f(x_1.....,x_n) = \overline{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \vee ... \vee \overline{\frac{\partial f}{\partial x_n}} = \bigvee_{i=1}^{n-1} \min DNF.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмицкий Д. В., Шмерко В. П., Янушкевич С. И.* Булево дифференциальное исчисление в вычислительной технике. Матричный аппарат булева дифференциального исчисления. Минск, 2007.
2. *Янушкевич С., Бохманн Д., Станкович Р., Тошич Ж., Шмерко В.* Логическое дифференциальное исчисление: достижения, тенденции и приложения // Автоматика и телемеханика, 2004. № 6. С. 155–170.
3. *Tucker J. H., Tapia M. A., Bennett A. W.* Boolean Integral Calculus for Digital Systems // IEEE Trans. On Comp. Vol. 34, issue 1, Jan. 2000. P. 78–81.

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ОБНАРУЖЕНИЯ В ИГРЕ ПОИСКА НЕПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В КРУГЕ[1]

ESTIMATES FOR THE DETECTION TIME OF THE SEARCH GAME WITH THE IMMOBILE TARGET ON THE CIRCLE

Местников С. В.[1], Эверстова Г. В.[2]

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]mestsv@mail.ru, [2]egvmes@mail.ru

В работе рассматривается игра поиска неподвижного объекта в замкнутом ограниченном множестве G на плоскости, являющемся кругом [1-3]. Целью ищущего игрока является гарантированное обнаружение прячущегося игрока за минимальное время. Динамика движения

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской федерации № 02.740.11.0609.

ищущего игрока простая. Прячущийся игрок неподвижен, находится в круге и считается обнаруженным, если попадает в круг обнаружения ищущего игрока. Динамика движения ищущего P описывается уравнением

$$\text{P: } \dot{x} = u, \|u\| \leq 1, \ x, u \in R^2,$$

допустимые управления $u = u(t)$, $t \geq 0$, игрока P кусочно-непрерывные функции. Под чистой стратегией игрока P будем понимать пары $a = (x_0, u(\cdot))$, где $x_0 \in G \subset R^2$, $u = u(\cdot)$ - допустимое управление. Множество всех допустимых управлений обозначим через D_P. Под чистой стратегией игрока E будем понимать выбор точки y из множества G. Игра происходит следующим образом: игрок E выбирает точку y из множества G и остается там до конца игры, игрок P, не зная выбора игрока E, выбирает стратегию $a = (x_0, u(\cdot))$. Прячущийся игрок считается обнаруженным (пойманным) в момент $t \geq 0$, если расстояние между точками $x(t)$ и y меньше или равно l, $l > 0$ - радиус круга обнаружения игрока P, $x(\cdot)$ траектория движения игрока P, реализованная выбором стратегии $a = (x_0, u(\cdot))$.

Для заданных конкретных значений радиуса круга G, где может находиться прячущийся игрок, найдены оценки времени обнаружения ищущим прячущегося игрока. В работе [4] рассмотрен случай, когда множество G является прямоугольником.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А.* Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
2. *Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю.* Игры поиска. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
3. *Зенкевич Н. А., Местников С. В.* Динамический поиск подвижного объекта в условиях конфликта // Вопросы механики и вопросов управления, 1991. Т. 14. С. 68–76.
4. *Местников С. В., Эверстова Г. В.* Оценки времени обнаружения в задаче поиска неподвижного объекта в прямоугольнике // Мат. заметки ЯГУ, 2006. Т.13, №2. С. 47–62.

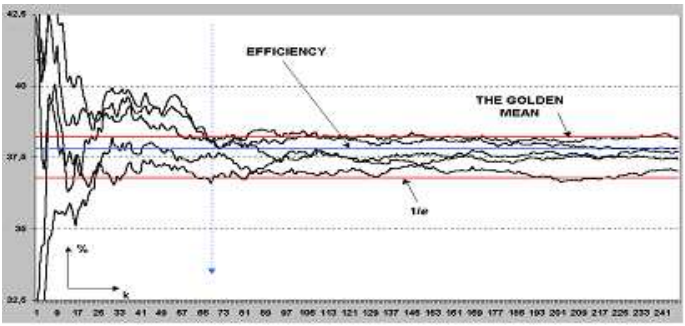
О СВЯЗИ Q-ПОЛИНОМОВ ГАУССА И ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРЕЙДЕРСКИХ ОПЕРАЦИЙ

ABOUT GAUSS Q-POLYNOMIALS AND PERFORMANCE EVALUATION OF TRADE TRANSACTION

Прелов В. В.

Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН
Москва, Россия
prelov@iitp.ru

В нашей работе представлен и обсуждается результат обработки внушительного массива данных (более 500 млн. записей), взятых из архивов протоколов по совершенным с 2000 по 2010 г. сделкам на основных российских и мировых финансовых рынках (ForEx, DJIA, Nasdaq, РТС, ММВБ и др.). Нами было выявлено и проанализировано одно любопытное свойство, касающееся риск-менеджмента и портфельного управления, а именно поведение так называемого параметра эффективности трейдерских операций, под которым обычно понимают отношение реальной и максимально возможной доходности на определенном временном отрезке для выбранного эмитента или рыночного индекса.



Мы выявили асимптотическую устойчивость нашего параметра, обозначенного через E, в узком коридоре. Картина асимптотики и скорости сходимости E показана на рисунке.

Исследуя этот феномен, мы даём теоретико-числовое объяснение полученного результата с привлечением q-полиномов Гаусса и показываем, что наш параметр рыночной активности

$$\mathrm{E} \sim \frac{d}{dq}\left\{q^{s_1}\prod_{j=1}^{s_2}\frac{1-q^{s_3+j}}{1-q^j}\right\}\cdot\int\left\{q^{b_1}\prod_{j=1}^{b_2}\frac{1-q^{b_3+j}}{1-q^j}\right\}dq.$$

Интересно также заметить, что результат усреднения доходности, или эффективности трейдерских решений, операций с инвестиционным портфелем лежит в интервале между весьма популярными константами $1/e \approx 0,367880$ и «золотым сечением», записанным в форме $\varphi = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,381966$, иногда используемым финансовыми аналитиками при расчете уровней технических коррекций финансовых активов.

ОБ ОДНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ n ЛИЦ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

ON NONCOOPERATIVE n-PERSON DIFFERENTIAL GAME IN BANACH SPACE

Троева М. С.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
troeva@mail.ru

В работе [1] было доказано существование ситуаций ε-равновесия в классе стратегий кусочно-программного типа в бескоалиционных дифференциальных играх n лиц с независимыми движениями и непрерывными функциями выигрыша, протекающих в конечномерных пространствах, динамика в которых описывается задачей Коши для системы ОДУ.

В работе [2] результаты, полученные в работе [3] были перенесены на случай банаховых пространств. В [4] доказано существование ситуаций ε-равновесия в классе стратегий кусочно-программного типа в бескоалиционной дифференциальной игре 2 лиц с независимыми движениями и непрерывными функциями выигрыша, динамика каждого игрока в которой описывалась краевой задачей для уравнения параболического типа, содержащей меру Дирака.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, №02.740.11.0609

Существование единственной траектории игроков для любой ситуации в игре, определяемой решением соответствующей краевой задачи, описывающей динамику игрока, следует из результатов работ [3, 4], в которых исследованы абстрактные параболические эволюционные уравнения в банаховых пространствах, содержащие меры Радона.

В данной работе доказывается существование ситуаций ε-равновесия в бескоалиционной дифференциальной игре n лиц с независимой динамикой и непрерывными функциями выигрыша, определенными на траекториях игры, протекающей в банаховом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малафеев О. А.* Управляемые конфликтные системы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000.
2. *Троева М. С., Лукин В. С.* Существование ситуаций ε-равновесия в бескоалиционной дифференциальной игре в банаховом пространстве // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова. Часть II. Тез. докл. / Якутск: Филиал изд-ва СВФУ, ИМИ, 2010. С. 49–50.
3. *Amann H.* Nonautonomous parabolic equations involving measures // J. Math. Sci., 2005. V. 130, № 4. P. 4780–4802.
4. *Amann H.* Linear parabolic problems involving measures // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. (RACSAM), 2001. V. 95 (1). P. 85–119.

Секция III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

INTERACTION DYNAMICS OF SINGULAR WAVE FRONTS COMPUTED BY PARTICLE METHODS

Chertock A.

North Carolina State University, Raleigh, NC USA
chertock@math.ncsu.edu

Some of the most impressive singular wave fronts seen in Nature are the transbasin oceanic internal waves, which may be observed from a space shuttle, as they propagate and interact with each other. The characteristic feature of these strongly nonlinear waves is that they reconnect whenever any two of them collide transversely. The dynamics of these internal wave fronts is governed by the so-called EPDiff equation, which, in particular, coincides with the dispersionless case of the Camassa-Holm (CH) equation for shallow water in one- and two-dimensions.

Typical weak solutions of the EPDiff equation are contact discontinuities that carry momentum so that wavefront interactions represent collisions in which momentum is exchanged. The equation admits solutions that are nonlinear superpositions of traveling waves and troughs that have a discontinuity in the first derivative at their peaks and therefore are called peakons. Capturing these solutions numerically is a challenging task especially when a peakon-antipeakon interaction needs to be resolved.

In this talk, I will present a particle method for the numerical simulation and investigation of solitary wave structures of the EPDiff equation in one and two dimensions. I will show that the discretization of the EPDiff by means of the particle method preserves the basic Hamiltonian and the weak and variational structure of the original problem. I will also present a convergence analysis of the proposed particle method in 1-D.

Finally, I will demonstrate the performance of the particle methods on a number of numerical examples in both one and two dimensions. The numerical results illustrate that the particle method has superior features and represent huge computational savings when the initial data of interest

lies on a submanifold. The method can also be effectively implemented in straightforward fashion in a parallel computing environment for arbitrary initial data.

REFERENCES

1. *Chertock A., Du Toit P. and Marsden J. E.* Integration of the EPDiff equation by particle methods, submitted.
2. *Chertock A., Liu J.-G. and Pendleton T.* Convergence analysis of the particle method for the Camassa-Holm equation, submitted.

MATHEMATICAL MODELING AND A NEW QUASY-MONOTONE NUMERICAL METHOD FOR PULSE LASER-TARGET INTERACTIONS[1]

Kuzenov V. V.[1], Ryzhkov S. V.[2]

[1] *A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
kuzenov@ipmnet.ru
[2] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
svryzhkov@gmail.com

We propose an innovative scheme [1-3] with spherical and cylindrical target, compressed by a strong external source (laser with high energy pulses) for heating and achievement thermonuclear temperatures. In this case there is (a significant increase of seed fields up to the intensity of tens megagauss) a generation of ultra strong magnetic fields with laser compression. In traditional schemes (direct and indirect drive) it is supposed to use a large number ($\sim$100) of irradiating beams, but it is extremely difficult to implement in a fusion reactor. Implementation of spherical compression of magnetized targets it can be possible to reduce significantly the number of irradiating laser beams, it allows you to get a clean and cheaper fusion not having the disadvantages of magnetic and inertial fusion.

A mathematical model of magnetized target radiation with multiple laser beams were developed, it describes the dynamics and kinetics of thermonuclear magnetized plasma. Modeling of processes of plasma compression and magnetic field immersed in plasma compression using laser beams

[1]Supported by the Erasmus Mundus Action 2 Programme of the European Union, RFBR grant No. 09-08-00137-a and RFBR (Russia) – Consortium EINSTEIN (Italy) project No. 09-08-92422-KE.

with high pulse energy implies a uniform compression of the target. Using a multilevel model and quasi-monotone original method of high level of accuracy in research of strongly non-linear modes of interaction of lasers with high pulse energy and supersonic plasma jets with the target allows to study the process of creating the plasma, dynamics and kinetics of magnetized laser-produced plasma and the eddy current excitation in the presence of an external magnetic field, and also consider the transfer of radiation, the presence of spontaneous magnetic fields and plasma turbulence in the external seed magnetic field.

The model describes the compression of the target with laser beams in a magnetic field of arbitrary configuration and can be used for numerical study of the formation of plasma in an external seed magnetic field and its heating during compression using high-energy external sources (drivers). These equations take into account the compression of the magnetic field frozen into the plasma and the plasma behavior under compression.

Two-dimensional radiative magnetogasdynamic code is part of the NICA (Nonstationary Instruments and Codes for fusion Applications) for magneto-inertial fusion (MIF), includes radiation transport in the multigroup diffusion approximation and gas dynamics with dynamic adaptive grid and finite-difference scheme of high level of accuracy. The developed model will be used for the numerical experiment, for research in the physics of different magnetic configurations and drivers, as well as electromagnetic implosion targets. This methodology is applicable to all variants MIF and any fusion fuel cycle and can be used to calculate the high-density plasma liner. Mathematical tools developed in this research work can be applied as a uniform compression, as in fast ignition of fusion targets. Solving this problem will stimulate further experimental and theoretical studies of the interaction of laser radiation and plasma jets with the plasma, gas and condensed matter and open new directions in research of plasma application for the solution of important scientific and technological problems.

A numerical method for high resolution, developed in this work, has improved the dissipative and dispersive properties (significantly the modeling of turbulent flows) when the multidimensional convective flux discretization is implemented. Quasi-monotone numerical methods do not cause the appearance of false extrema in the spatial distributions (unphysical oscillati- ons, developing over time). The advantage of higher resolution is that high spatial accuracy is obtained with a relatively small number of points of the spatial grid. This approach describes well the sharp and monotone spatial profiles of all the gas dynamic parameters.

REFERENCES

1. *Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V.* A mathematical model of the interaction of high pulse energy laser with dense plasma target with initial seed magnetic field. Preprint No 942. Moscow: A.Yu. Ishlinsky IPMech RAS, 2010.
2. *Ryzhkov S. V.* The behavior of a magnetized plasma under the action of laser with high pulse energy // Problems of atomic science and technology. Series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration"(7), 2010. № 4. P. 105–110.
3. *Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V.* Developing the numerical model for studying laser-compression of magnetized plasmas // Acta Technica, 2011. http://aldebaran.cz/ jas/sppt/final_paper/jas/163-RyzhkovKuzenov-v4.pdf

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАДИОТЕХНИКИ[1]

STATISTICAL SIMULATION OF SOME PROBLEMS OF RADIO ENGINEERING

Аверина Т. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия
ata@osmf.ssc.ru

Некоторые задачи радиотехники могут быть описаны как системы со случайным периодом квантования сигналов во времени, т.е. как системы со случайной структурой [1, 2]. Особенность таких систем связана с дискретным характером воздействия, что приводит к дискретному поступлению информации об измеряемом параметре. Из-за этого система становится дискретной со случайным квантованием, так как последовательность дельта-импульсов образует случайный поток сигналов.

Системы со случайным периодом квантования можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей [1, 2]. Системы со случайным квантованием *с амплитудной модуляцией* описываются СДУ с пуассоновской мерой, не зависящей от вектора состояния. Системы со случайным квантованием *с*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-00798, № 11-01-00282).

частотной модуляцией могут быть описаны только СДУ с пуассоновской мерой, зависящей от вектора состояния. Причем очень часто эта зависимость не может быть перенесена в коэффициенты.

В докладе модифицирован численный алгоритм [3] решения СДУ, когда характеристическая мера, определяющая пуассоновскую меру, зависит от вектора состояния. Построенный ранее алгоритм основан на численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений [4] и методе максимального сечения [5]. Новая модификация состоит в применении модифицированного метода максимального сечения [6] и имеет меньшую трудоемкость.

Численные испытания модифицированного метода проведены на решении задач радиотехники [7], для которых получены аналитические выражения для плотности вероятности первых двух моментов решения. Тестовые испытания алгоритма были проведены на задачах воздействия пуассоновских дельта-импульсов на интегрирующую цепочку RC и на колебательный контур. Численные результаты демонстрируют высокую точность вычислений и уменьшение времени расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993
2. *Артемьев В. М., Ивановский А. В.* Управление дискретными системами со случайным периодом квантования. М.: Энергоатомиздат, 1986.
3. *Averina T. A.* Numerical solution to SDEs systems with a Poisson component // Proceedings of the 5th St.Petersburg Workshop on Simulations. St.Petersburg: NII Chemistry St.Petersburg University Publishers, 2005. P. 172–177.
4. *Artemiev S. S., Averina T. A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. Utrecht: VSP, 1997.
5. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М: Наука, 1982.
6. *Михайлов Г. А., Аверина Т. А.* Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // ДАН. М.: МАИК Наука, 2009. Т. 428, № 2. С. 163–165.
7. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977

ДИНАМИКА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ВЕЧНОМЕРЗЛОМ ГРУНТЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОЛИМЕРНОГО ТРУБОПРОВОДА ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

TEMPERATURE FIELD DYNAMIC IN THE PERMAFROST THROUGH THE ACTION OF POLYMERIC HEATING PIPELINE

Акимов М.П.[1], Старостин Н.П.[2], Мордовской С.Д.[3]

[1,3] *Северо-Восточный Федеральный Университет Якутск, Россия*
[1]mirpet@mail.ru, [3]msd@mail.ru
[2] *Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия*
nikstar56@mail.ru

В настоящее время в Центральной Якутии эксплуатируются опытно-промышленные бесканальные варианты внутриквартальных подземных трубопроводов горячего водоснабжения и теплоснабжения из сшитого полиэтилена, армированного нитью из арамидного волокна (кевлара), с тепловой изоляцией из пенополиуретана в полиэтиленовой оболочке. Исследование динамики температурного поля подземного полимерного трубопровода с теплоизоляцией в процессе эксплуатации на вечномерзлый грунт является актуальной задачей, решение которой позволит разработать рекомендации по применению перспективных трубопроводов в регионах холодного климата, а также будет способствовать внесению изменений в существующие отраслевые и строительные нормативные документы.

При решении задачи методом конечных разностей трудности возникают вследствие сложности рассматриваемой области. В плоском случае границы расчетной области представляют собой отрезки прямых и полуокружностей, что затрудняет выбор системы координат для построения расчетной сетки. Обычно такую задачу решают, используя уравнение теплопроводности в декартовой системе координат . Такой подход для определения температурного поля в многослойной трубе осложняется ввиду наличия условий теплового контакта между слоями. При исследовании влияния теплоносителя в трубе на тепловое состояние грунта, приближенное задание границ в непосредственной близости от теплообменной поверхности может привести к существенным погрешностям при определении границ оттаивания.

В данной работе для более точного описания температурного поля в окрестности трубы с теплоносителем перспективным представляется решение задачи теплопроводности в полярных координатах.

Математическая постановка задачи Стефана со сглаженными коэффициентами формулируется следующим образом: Требуется определить нестационарное температурное поле $T(r,\varphi,t)$ удовлетворяющее уравнению теплопроводности в полярных координатах:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right), \quad (r,\varphi)\in\Omega$$

граничному условию на дневной поверхности грунта:

$$\lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\sin\varphi - \frac{\partial T}{\partial r}\cos\varphi\right)\Big|_{\Gamma_1} = -\alpha\left(T(r,\varphi,t)|_{\Gamma_1} - T_{\text{окр}}(t)\right);$$

граничным условиям на границах Γ_2, Γ_3 и Γ_5:

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0;$$

$$-\frac{\partial T}{\partial\varphi}\Big|_{\Gamma_3} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi}\Big|_{\Gamma_5} = 0;$$

граничному условию на внутренней поверхности трубопровода:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{\Gamma_4} = \alpha\left(T(r,\varphi,t) - T_{\text{воды}}(t)\right)$$

и начальному условию:

$$T(r,\varphi,0) = T_{\text{Н}}(r,\varphi)$$

На границах слоев заданы условия идеального теплового контакта:

$$\begin{cases} \lambda_i\,\frac{\partial T}{\partial r}\big|_{r=r_i-0} & = & \lambda_i\,\frac{\partial T}{\partial r}\big|_{r=r_i+0} \\ T(r_{i-0},\varphi,t) & = & T(r_{i+0},\varphi,t) \end{cases} \qquad i=1,2,3$$

Задача решается методом конечных разностей с использованием экономичных схем сквозного счета. Приводятся результаты вычислительных экспериментов. Анализируется динамика температурного поля в грунте в окрестности полимерного теплопровода, эксплуатируемого в условиях Якутии. Расчетами показана стабилизация глубины протаивания вечномерзлого грунта подверженного воздействию теплопровода.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА

NUMERICAL SIMULATION OF PIPELINE TRANSPORT

Алексеев В. Д.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
avd@sakha.ru

Трубопроводный транспорт жидких и газообразных углеводородов играет важнейшую роль в топливно-энергетическом обеспечении хозяйственного комплекса России и нашей Республики, в ее устойчивом экономическом развитии.

Несмотря на очевидные преимущества трубопроводного транспорта, при транспортировании нефти и нефтепродуктов по магистральным трубопроводам имеет место загрязнение атмосферы водоемов и почвы. В связи с этим серьезное внимание уделяется сокращению потерь на магистральных трубопроводах, прокладываемых в условиях вечной мерзлоты. Как правило, потери связаны с нарушением правил эксплуатации, повреждением трубопроводов от коррозии, несвоевременным ремонтом, стихийными бедствиями.

В связи с этим, чрезвычайно актуальна проблема разработки системы обнаружения утечек, возникающих при повреждении трубопроводов. Эта проблема приобрела особую актуальность в связи с возрастающими требованиями к охране окружающей среды.

Данная работа посвящена разработке численного решения адекватных математических моделей и повышение качества работы трубопроводного транспорта, путем своевременнего обнаружения мест утечек используя математическое моделирование.

В работе изучается процесс течения вязкой жидкости в трубе.

Гипотеза исследования заключается в том, что на примере пространственно двумерной задачи оптимизации процессов транспортировки нефти рассматривается возможность применения многопроцессорных систем для моделирования проблем нефтепромышленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В. И., Попов В. В., Тимофеева Т. С.* Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск.: СО РАН, 2000.
2. *Бондарев Э. А.* Термогидродинамика образования гидратов в системах добычи и транспорта газа. Новосибирск.: АН СССР, 1980.

3. *Лейбензон Л. С.* Подземная гидрогазодинамика. Москва.: Изд. Академия наук СССР, 1953.
4. *Бондарев Э. А., Васильев В. И, Воеводин А. Ф., Павлов Н. Н., Шадрина А. П* Термогидродинмика систем добычи и транспорта газа. Новосибирск.: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ СТЫКОВОЙ СВАРКИ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ ДЛЯ ГАЗОПРОВОДОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА

DETERMINATION OF TECHNOLOGICAL REGIMES BUTT WELDING OF POLYETHYLENE PIPES FOR GAS PIPELINES BASED ON MODELING THERMAL PROCESS

Аммосова О. А.[1], Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия
[1]ammosovao@mail.ru

Существующая технология стыковой сварки полиэтиленовых труб (ПЭ) позволяет проводить сварочные работы при температуре воздуха от 40 до -15 °C, что не охватывает низкие температуры, достигаемые в северных регионах России.

Для расширения допустимого диапазона в сторону низких температур предлагается использование методов математического моделирование теплового процесса сварки.

В большинстве работ, посвященных данной теме, тепловой процесс при стыковой сварке ПЭ труб исследуют, используя одномерное уравнение теплопроводности. При таком моделировании не учитываются особенности теплового процесса сварки ПЭ труб. На этапе осадки часть расплавленного материала выдавливается наружу, образуя грат, и свариваемые трубы укорачиваются. В существующих математических моделях теплового процесса при сварке влияние образовавшегося грата на температурное поле не учитывается. Не учитывается также уменьшение длины трубы на величину осадки, что препятствует использованию подобных моделей для решения задач регулирования температурного режима.

В связи с этим актуальным является разработка математической модели теплового процесса стыковой сварки полиэтиленовых труб,

учитывающей основные процессы, влияющие на температурный режим.

Процесс сварки состоит из двух этапов - нагрев и осадки. Температурные поля и скорости охлаждения для различных условий окружающей среды необходимо сравнивать для части трубы в окрестности свариваемой кромки, ограниченной изотермой с температурой близкой к температуре размягчения материала трубы (зона термического влияния - ЗТВ). Выбор границы области сравнения обусловлен тем, что при температурах выше температуры размягчения происходят структурные изменения в материале, а при температурах ниже температуры размягчения полимерный материал не меняет структуру и, соответственно, при остывании его прочностные свойства остаются неизменными.

Расчеты показали, что практическое совпадение температурных полей в ЗТВ при различных низких температурах воздуха достигается, если обеспечить одинаковые глубины проплавления. Следовательно, предложенная методика определения продолжительности воздействия нагретым инструментом при низких температурах сводится к определению продолжительности процесса нагрева, обеспечивающего глубину проплавления, соответствующую для рекомендуемой продолжительности при нормальных условиях.

Предложенная методика позволяет обеспечивать необходимую глубину проплавления, управляя лишь одним параметром сварки - продолжительностью воздействия нагретым инструментом, тогда как другие параметры (давление и температура нагрева) остаются такими же, как и при нормальных условиях.

После нагрева инструмент удаляют, и оплавленные кромки осаживают под давлением и выдерживают под этим давлением определенное время, в результате образуется грат. Разработана новая математическая модель теплового процесса на стадии осадки, учитывающая формоизменение при осадке и влияние образовавшегося грата на тепловой режим сварочного соединения. Результаты расчета показывают существенное влияние грата на температурное поле стенки трубы в окрестности зоны сварки и его изменение по времени.

При температуре воздуха ниже регламентируемой скорость охлаждения материала увеличивается, что вызывает значительные внутренние напряжения, которые не успевают сглаживаться. Чтобы достичь необходимой скорости охлаждения материала в сварном соединении предлагается использование цилиндрической теплоизоляционной камеры. На основе моделирования теплового процесса остывания свар-

ного шва определены размеры камеры, обеспечивающие допустимую скорость охлаждения сварного соединения.

Использование предлагаемых методик выбора технологических режимов стыковой сварки обеспечивает протекание теплового процесса в свариваемых трубах по закономерностям близким к допустимой динамике температурного поля. Предлагаемый подход определения технологических режимов стыковой сварки ПЭ труб может быть рекомендован для проведения сварочных работ в зимний период в регионах холодного климата.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА ПРИ СВАРКЕ АРМИРОВАННЫХ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ

NUMERICAL MODELING OF THERMAL PROCESSES IN WELDING OF REINFORCED POLYETHYLENE PIPES

Аммосова О. А.[1], Старостин Н. П., Андреев Б. И.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия
[1]ammosovao@mail.ru

В настоящее время одной из актуальных задач нефтегазовой отрасли является всестороннее изучение возможности использования армированных полиэтиленовых труб (АПТ) в газораспределительных сетях до 1,2 МПа и выше. АПТ состоит из трех слоев: внутреннего и внешнего из полиэтилена и промежуточного - армирующего, полученного намоткой арамидными нитями. Сварка как способ соединения является приоритетным при монтаже конструкций из армированных труб. Согласно нормативным документам сварку полиэтиленовых (ПЭ) труб для газопроводов можно проводить при температурах окружающего воздуха (ОВ) от -15 °С до 45 °С [1] . При более низких температурах ОВ сварочные работы рекомендуется выполнять в отапливаемых помещениях, обеспечивающих соблюдение заданного температурного интервала. Однако такая сварка связана с большими энергетическими, непроизводительными затратами и длительной подготовкой, что недопустимо в аварийных ситуациях. Актуальной проблемой является разработка методов и средств оперативной сварки АПТ в регионах с холодным климатом, где температуры ОВ достигают значений ниже минус 15 °С.

В работе [2] предложен способ стыковой сварки ПЭ труб при температурах воздуха ниже нормативных. При низких температурах ОВ технологические режимы, обеспечивающие такую же динамику температурного поля, что и при допустимых температурах ОВ, определяются на основе математического моделирования теплового процесса сварки [3]. Перспективным является развитие предложенного подхода регулирования динамикой температурного поля с использованием математического моделирования теплового процесса для сварки АПТ с помощью гильз.

В данной работе рассматривается этап нагрева, на котором при сварке гильзы в условиях низких температур необходимо обеспечить такую же границу проплавления, что и при допустимых температурах воздуха.

Сварка гильзы в ПЭ трубе схожа с муфтовой сваркой труб. Сглаживание коэффициента теплоемкости проводим, как в работе [4], на последовательности интервалов, перекрывающих интервал фазового перехода шириной примерно 50 °C. Согласно расчетам проведение сварки АПТ с помощью гильзы при температурах воздуха ниже нормативных не обеспечивает необходимую динамику температурного поля. Для сближения температурных полей в зоне сварки предлагается согласно работе [2] использование предварительного прогрева стенки трубы с помощью сварочной гильзы. Предварительный прогрев стенки трубы при температурах воздуха ниже нормативных осуществляется путем понижения напряжения предаваемого гильзе в течение некоторого промежутка времени. Расчетами был найден период времени предварительного прогрева при температуре ОВ минус 40 °C, который равен 20 минутам. В то же время расчеты показали, что температурное поле в стенке трубы и гильзе не достаточно однородно для дальнейшего этапа сварки АПТ. С целью достижения однородности температурного поля в трубе и гильзе напряжение на спираль не подается и происходит естественное охлаждение трубы в течение 2-х минут. Расчеты показывают, что зона термического влияния (ЗТВ) полученные при допустимых температурах ОВ могут быть сближены с ЗТВ при низких температурах путем предварительного прогрева и выравнивания стенки трубы и гильзы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *СП 42-103-2003.* Проектирование и строительство газопроводов из полиэтиленовых труб и реконструкция изношенных газопроводов. - М.: Полимергаз, ФГУП ЦПП, 2004.

2. *Пат. РФ № 2343331 RU F16L 13/00, 47/00.* Способ сварки полимерных труб / Старостин Н.П., Герасимов А.И., Аммосова О.А.; Инст. проблем нефти и газа СО РАН. - 2006144681/06; заявл. 14.12.2006; опубл. 10.01.2009, Бюл. № 1.
3. *Старостин Н. П., Аммосова О. А.* Математическое моделирование теплового процесса при сварке полиэтиленовых труб встык при температурах воздуха ниже нормативных // Вестник машиностроения, 2009. № 1. С. 17–20.
4. *Старостин Н. П., Егорова М. П., Герасимов А. И.* Температурный режим при электромуфтовой сварке полиэтиленовых труб для газопроводов // Нефтегазовое дело, 2009. http://www.ogbus.ru/authors/Starostin/Starostin_3.pdf

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ДАТЧИКОВ, РЕГИСТРИРУЮЩЕЙ ВОЗМУЩЕНИЯ С ЗАДАННЫМ АМПЛИТУДНЫМ ПОРОГОМ ЗА МИНИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

COMPUTATIONAL METHOD FOR DETERMINATION OF SENSOR'S CONFIGURATION REGISTERING DISTURBANCE WITH GIVEN THRESHOLD IN MINIMAL TIME

Астракова А. С.[1], Банников Д. В.[2], Лаврентьев М. М.[3](мл.), Черный С. Г.[2]

[1,2]*Институт вычислительных технологий СО РАН*
Новосибирск, Россия
[1]anna.astrakova@gmail.com
[3]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
mmlavr@yahoo.com

Пусть в плоскости есть область $\mathbf{\Omega}$, в которой содержатся подобласти источников возмущений $\mathbf{P}$ и область целесообразного установления датчиков для фиксации возмущений $\mathbf{D}$. Требуется так расположить L датчиков чтобы

- они обеспечивали обнаружение возмущения из любой точки области $\mathbf{P}$ за минимальное время,
- осуществляли амплитудную фильтрацию одним из следующих способов:

– фиксировали возмущения от всех источников с как можно большей амплитудой,

– каждое возмущение с амплитудой не меньше d определялось по крайней мере либо одним либо двумя датчиками.

На основе этих критериев в работе строятся функционалы и ограничения и формулируется оптимизационная задача. Во-первых, строится функционал T времени первого обнаружения датчиками волны от самой удаленной точки области ее формирования. Его минимизация дает конфигурацию датчиков, обеспечивающую минимальное время регистрации волны, вышедшей из любой точки области возможного ее формирования. Во-вторых, рассматривается ряд функционалов и ограничений, отвечающих за амплитудную фильтрацию регистрируемых возмущений. К ним относится функционал F_A, максимизация которого располагает датчики так, что наибольшее возмущение от каждого источника ловится по крайней мере одним датчиком. Формулируются ограничения $\varphi_1 \leq 0$ или $\varphi_2 \leq 0$, гарантирующие формирование конфигурации таким образом, что по крайней мере один или по крайней мере два ее датчика регистрируют волну из любого источника, если ее амплитуда не меньше заданного порога. Так как эти ограничения всегда положительны, то можно рассматривать φ_1 и φ_2 в качестве функционалов, подвергающихся минимизации. Причем, если ставятся ограничения и они выполняются, то осуществляется точная фиксация, если проводится минимизация этих выражений - осуществляется приближенная фиксация.

Математически задача оптимизации формулируется следующим образом.

Найти конфигурацию $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_L\}$, *обеспечивающую минимальное значение функционалов*

$$\min_{\mathbf{Q}\in\Omega} \left(F_1(\mathbf{Q}), \ldots, F_q(\mathbf{Q})\right),$$

при наличии фазовых ограничений

$$\mathbf{Q} \in \mathbf{D}$$

и целевых ограничений

$$\varphi_j(\mathbf{Q}) \leq 0, j = 1, \ldots, m.$$

Решение задачи в различных постановках осуществляется с помощью генетического алгоритма [1] и в случае двухцелевой оптимизации

представляет собой фронт Парето. При расчете времён добегания и амплитуд возмущений используется линейная аппроксимация модели мелкой воды [2]. Алгоритм исследуется на тестовой акватории с использованием модельных амплитуд. Задача об оптимальном расположении датчиков решается для реальной Курило-Камчатской области возникновения волны цунами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Астракова А. С., Банников Д. В., Лаврентьев М. М., Черный С. Г.* Применение генетического алгоритма к задаче оптимального расположения датчиков // Вычислительные технологии, 2009. Т. 14, №5. С. 3–17.
2. *Marchuk An. G.* A method for determination of wave rays in non-homogeneous media // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Problems in Geophysics, 2005, issue 10. P. 51–58.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАЗНООБРАЗИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ФОРМ УГЛЕРОДА

SOME QUESTIONS OF DIVERSITY OF CRISTAL CARBON FORM

Бескрованов В. В.[1], Юрьев Г. С.[2], Капитанов А. Н.[3]

[1,3] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
[1]bescrovanov@mail.ru
[2] *Институт неорганической химии имени А.В. Николаева СО РАН Новосибирск, Россия*
yurjev@mail.ru

Углерод характеризует обилие самородных форм и соединений с другими элементами. Высокая способность к катенации позволила ему производить конструкции с возрастающей сложностью. Все чаще используются новые уникальные углеродные материалы: наноалмазы, углеродные нанотрубки, фуллерены и фуллериты, пеноуглерод, алмазные пленки и алмазоподобные покрытия, карбины в различных сочетаниях с другими углеродными структурами.

Основой разнообразия служит присущий только углероду уникальный комплекс физико-химических особенностей. Его атом может иметь три валентности и образовывать три гибридные состояния sp^3, sp^2 и sp^1, образующих соответственно тетраэдрические (3D), плоские (2D) и линейные (1D) структурные единицы. Последние служат строительными элементами аллотропов углерода: 3D – алмаз и лонсдейлит; 2D –

графит, 1D – карбины. В работе «Исследование углерода – успехи и проблемы», metricconverterProductID2007 г2007 г. приведена диаграмма аллотропных форм углерода, построенная в виде треугольника, в вершинах размещены: 1) алмаз, лонсдейлит (sp^3); 2) графит (sp^2) и 3) карбин (sp^1). В центре треугольника расположены аморфный углерод → стеклоуглерод, а стороны образованы прямыми: 1) алмаз (sp^3) – карбино(полиино)алмазы – «супералмаз» – карбин (sp^1); 2) карбин (sp^1) – моно[N]циклы ← графины → слоистоцепочечный углерод – графит (sp^2); 3) графит (sp^2) – нанотрубки – C_70(П/Г = 0,5) – C_60((П/Г = 0,6) – гипотетические А/Г-гибриды – фуллерены C_32(П/Г = 2), C_28(П/Г = 3), C_20(П/Г = ∞?). Вблизи вершины графита (sp^2) приурочены графены, а вершины алмаза (sp^3) – алмазоподобные фуллерены. Здесь обозначения: А/Г – алмазо-графитовые, П/Г – пентагонально-гексагональные.

Алмаз (sp^3, 3D), кубическая сингония — Fd3m (a = 0,356 нм). Лонсдейлит, гексагональная сингония — $P6_3/$mmc (a = 0,252 нм; c = 0,412 нм). Графит (sp^2, 2D). Гексагональный (α) — $6_3/$mmc (a = 0,246 нм; c = 0,680 нм; c/a = 2,734). Ромбоэдрический (β) — R3m (a = 0,246 нм; c = 1,006 нм; c/a = 4,089), метастабильная фаза, встречается в природных графитах (до 30% массы). Графит кубический; a = 0,554 нм. Графен (sp^2, 2D) — двумерная (2D) кристаллическая фаза, представленная одним монослоем атомов углерода. Гексагональная решетка состоит из шести атомов (a = 0,246 нм). Карбин (sp^1, 1D) может образовывать несколько структурных модификаций, из которых изучены две: полииновая α-карбин (∼C≡C−C≡C∼) и кумуленовая β-карбин (∼C=C=C=C∼). Полиин (α) — гексагональная сингония (a = 0,508 нм, c = 0,780 нм). Кумулен (β) — гексагональная сингония (a = 0,467 нм, c = 0,258 нм). Создатель карбина А,М. Сладков пришел к выводу о множественности его видов и бесконечного числа аллотропных модификаций углерода со смешанными типами связей. Аморфный углерод — стеклообразное, не имеющее упорядоченной кристаллической решетки вещество.

Особое положение занимают недавно синтезированные каркасные структуры углерода, обладающие уникальными физическими характеристиками. Это одностенные и многостенные нанотрубки, а также большое семейство фуллеренов. Низкие фуллерены — $C_{24}, C_{28}, C_{30}, C_{32}$; средние — $C_{50}, C_{60}, C_{70}, C_{32}$; гиперфуллерены — $C_{76}, C_{78}, C_{82}, C_{84}, C_{90}$, C_{96}, C_{102}, C_{110} ; гиганты — $C_{240}, C_{540}, C_{960}$.

Большой вклад в разнообразие углерода вносят наноструктуры. Характеристическим для наночастицы следует рассматривать не размер,

а отличие свойств от свойств соответствующего макроматериала. У наноалмазов очень большая удельная поверхность. Атомы в приповерхностном слое могут изменить гибридизацию на sp2 с образованием сложного комплекса (алмаз(ядро)@графит(оболочка). Возможны и более сложные образования, такие как M@C_{60}@SWNT, сложные системы остов(алмаз)@оболочка(графит) или алмаз@графит@фуллерен.

Вывод. Мнообразие углерода является следствием уникального комплекса его свойств, включающего способность образовывать несколько гибридных электронных состояний, три валентности, аллотропные формы и множество наноструктур.

О ПРИМЕНЕНИИ ВТОРОГО ЗАКОНА КЕПЛЕРА В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

ABOUT APPLICATION OF SECOND KEPLER'S LAW IN SOCIOLOGICAL SYSTEM

Бубякина Г. И.[1], **Бубякин И. В.**[2]

[1,2] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
bubyakina_galina@mail.ru
[2] *ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск, Россия*
bubyakiniv@mail.ru

Общество и природа являются взаимосвязанными частями единого целого. Это означает, что в социальной реальности могут наблюдаться некоторые геометрические закономерности похожие на закономерность в природе. Приведем пример того, что в социальном пространстве имеются некоторые геометрические характеристики, которые похожи на геометрические характеристики физического пространства. Рассмотрим численность населения городов Республики Саха (Якутия) в период с 1988 по 2008 год с интервалом в 5 лет. На основании этих данных построим график динамики численности населения города Якутска с помощью радиус-векторов FA, FB, FC. Вычисляя площади треугольников ABC и BCF, находим, что их площади равны $S_{ABF} = S_{BCF}$. Точно такие же результаты мы получим и для других городов Республики Саха (Якутия).

Итак, на данном временном периоде можно увидеть аналогию со вторым законом Кеплера [1]. Следует заметить, что использование закона площадей Кеплера в анализе социологических данных дает свое

преимущество в том смысле, что с помощью сравнения площадей можно определить линейную зависимость или некоторое отклонение от линейной зависимости динамики численности населения от времени. Это является очень важным фактором в прогнозировании динамики численности населения.

В настоящей работе определяется также представление данных социологических исследований в виде некоторой поверхности в трехмерном пространстве, выясняется социологический смысл ее координатных линий и точки их пересечения. Рассматривая численность студентов государственных и муниципальных образовательных учреждений среднего профессионального образования в Дальневосточном федеральном округе за 2007/08, 2008/09 и 2009/10 годы обнаруживаем, что зависимость численности студентов в округе моделируется поверхностью Ф параллельного переноса, образованную непрерывным перемещением некоторой линии g вдоль другой линии d, при этом образующие поверхности Ф все время остаются параллельными между собой [2]. На поверхности с помощью линий g и d вводится координатная сеть, с помощью которой определяется положение точки на этой поверхности. При этом сеть координатных линий на этой поверхности имеет вполне определенный социологический смысл. Каждая координатная линия в социальном пространстве описывает динамику численности студентов округа, соответствующую парам лет 2008/09, 2009/10 и 2007/08, 2008/09. Точке пересечения координатных линий на рассматриваемой поверхности соответствует численность студентов в одной из областей Дальневосточного федерального округа.

Таким образом, сказанное выше показывает значимость геометрических методов для изучения закономерностей в социальной реальности, для наглядного их представления, а также для описания и анализа данных социологических исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бубякина Г.И.* Применение геометрических моделей в социологических исследованиях // Наука и современность: сб. материалов III Международной науч. - практ. конф. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010, часть 2. С. 84–88.
2. *Позняк Э.Г., Шишкин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М: Изд-во МГУ, 1990.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ГАШЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ[1]

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE HIGHT ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

Будугаева В. А.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия
v.a.budugaeva@ipng.ysn.ru

Рассмотрены свободные колебания двухслойного цилиндра в предположении,что внешний слой в сравнении с внутренним тоньше в 100 раз и это дает основание считать этот слой определенным полимерным покрытием. Проведен численный эксперимент, где показано влияние параметров вязкоупругого материала (внешнего слоя) на демпфирующие свойства цилиндра. Сделан вывод, что демпфирующие свойства могут быть либо улучшены, либо ухудшены за счет свойств материала-покрытия.

Анализ публикаций по динамике структурно-неоднородных вязкоупругих оболочечных конструкций с различными реологическими свойствами, в частности, выявил немонотонную зависимость их диссипативных характеристик от структурной неоднородности. В соответствие с этим представляется интересным провести исследование зависимости демпфирующих характеристик вязкоупругого цилиндра от тонкого полимерного покрытия.

Чтобы решить поставленную задачу, представляется возможным рассмотреть задачу свободных колебаниях двухслойного цилиндра, внешний слой которого достаточно мал, чтобы можно было считать его полимерным покрытием.

Уравнение свободных колебаний вязкоупругого цилиндра с учетом принципа соответствия, имеет вид :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Здесь все величины зависят от одной пространственной координаты r, так как имеет место осевая симметрия. Кроме этого, будем считать, что цилиндр находится в условиях плоскодеформированного состояния, то есть компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{r\ z}$, $\varepsilon_{\varphi\ z}$, $\varepsilon_{z\ z}$ равны нулю. Граница тела свободна от нагрузок

[1]Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 09-08-98501.

$$\sigma_r(R_0) = \sigma_r(R_2) = 0, \tag{2}$$

где R_0 и R_2—радиусы внутренней и внешней поверхностей, ограничивающих цилиндр. Отличные от нуля компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r,t)$, $\sigma_\varphi(r,t)$ и радиальное смещение $u(r,t)$ связаны между собой законом Гука

$$\sigma_r = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\frac{\partial u}{\partial r} + \bar{\lambda}\frac{u}{r}, \tag{3}$$

$$\sigma_\varphi = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\frac{u}{r} + \bar{\lambda}\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ определены зависимостями: для упругого случая $\bar{\lambda} = \lambda = const$, $\bar{\mu} = \mu = const$, для вязкоупругого случая [1]

$$\bar{\lambda} = \lambda[1 - \Gamma^c_\lambda(\omega_R) - i\Gamma^s_\lambda(\omega_R)], \tag{5}$$

$$\bar{\mu} = \mu[1 - \Gamma^c_\lambda(\omega_R) - i\Gamma^s_\lambda(\omega_R)], \tag{6}$$

где $\Gamma^c_\lambda(\omega_R) = \int\limits_0^\infty R_\lambda(\tau)\cos(\omega_R\tau)d\tau, \quad \Gamma^s_\lambda(\omega_R) = \int\limits_0^\infty R_\lambda(\tau)\sin(\omega_R\tau)d\tau$, при этом ρ — плотность материала, R —ядро релаксации вязкоупркгого материала, ω_R—действительная часть частоты свободных колебаний цилиндра.

Таким образом, задача в постановке (1) – (6) представляет собой задачу нахождения собственной частоты ω однослойного полого вязкоупругого цилиндра.

Для этого, следуя общепринятому методу при исследованиях свободных колебаний, решение задачи ищем в виде:

$$u(r,t) = u(r)\exp(i\omega t), \tag{7}$$

где $u(r)$ - непрерывная амплитуда радиального перемещения. В результате, учитывая соотношения (2),(3),(4) и воспользовавшись формулами [2] для производных функций Бесселя, получаем уравнение для нахождения частоты в виде:

$$A(R_0)B(R_2) - A(R_2)B(R_0) = 0, \tag{8}$$

где $A(r) = \lambda\chi J_0(\chi r) + 2\mu(\chi J_0(\chi r) - r^{-\ 1}J_1(\chi r))$,

$$B(r) = \lambda(\frac{2}{\pi r J_1(\chi r)} + \chi\frac{J_0(\chi r)}{J_1(\chi r)}Y_1(\chi r)) + 2\mu(\frac{2}{\pi r J_1(\chi r)} + \chi\frac{J_0(\chi r)}{J_1(\chi r)}Y_1(\chi r) - \\ -r^{-\ 1}Y_1(\chi r)), \text{где } R_0 \le r \le R_2.$$

Здесь J_0— функция Бесселя нулевого порядка, перого рода, J_1— функция Бесселя первого порядка, перого рода, Y_1— функция Бесселя первого порядка, перого рода, при этом $\chi^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$, а коэффициенты λ и μ имеют вид (5) и (6). Очевидным является тот факт, что в случае вязкоупругого цилиндра собственная частота будет иметь комплексный вид, то есть $\omega = \omega_R + i\omega_I$, где ω_I —показатель гашения собственной частоты цилиндра. Для того, чтобы оценить уровень гашения собственной частоты цилиндра с тонким покрытием, результаты, полученные выше обобщим для цилиндра, состоящего из двух слоев, как это было сделано в работе [3], считая, что на границе раздела двух сред выполняются условия неразрывности перемещений и напряжений: $u(R_1 - 0) = u(R_1 + 0), \sigma_r(R_1 - 0) = \sigma_r(R_1 + 0)$, R_1 - граница раздела двух сред (слоев).

При сделанных предположениях, получим уравнение для нахождения собственной частоты двухслойного цилиндра, аналогичное (8). В результате вычислительного эксперимента вся толщина стенки полого цилиндра делилась на 100 слоев: 99 - из них заполнялись одним материалом, а один (внешний) - другим. Меняя ядро релаксации в формулах (5) и (6) можно подобрать такой вязкоупругий материал для внешнего тонкого слоя, что собственная частота колебаний оболочки значительно уменьшается. А внешний слой из-за малости толщины можно считать покрытием для данной цилиндрической оболочки. Таким образом, мы убедились в том, что демпфирующими свойствами цилиндрической конструкции можно управлять с помощью вариации не только вязкоупругих материалов покрытия, но и его толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. - М.: Наука, 1970.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. - М.: Наука, 1970.
3. *Будугаева В. А.* Оптимизация декремента затухания свободных колебаний вязкоупругой слоистой сферы при ограничении на массу // Прикладная механика и теоретическая физика, 2000. Т. 41, №2. С. 161–165.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ [1]

ITERATION METHODS FOR SOLVING PRESSURE EQUATION IN MULTIPHASE FILTRATION

Вабищевич П. Н.[1], **Васильева М. В.**[2]

[1] *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия*
vab@ibrae.ac.ru

[2] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
vasilyeva_mv@mail.ru

Прикладные проблемы нефте- и газодобычи численное исследуются с использованием математических моделей течений многофазной жидкости в пористых средах. Базовая модель включает в себя уравнения неразрывности и законы Дарси для каждой фазы, а также алгебраическое выражение для суммы насыщенностей [1], [2]. Основные вычислительные алгоритмы для таких задач реализуются с использованием уравнения для давления. В работе отмечаются основные свойства задачи для давления, которые необходимо отследить на дискретном уровне. Эллиптическая задача для давления характеризуется несамосопряженностью оператора задачи. Рассматриваются возможности ее приближенного решения на основе итерационных методов решения сеточных задач. Отдельное внимание уделено вычислительным алгоритмам расчета давления на компьютерах параллельной архитектуры [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. Applied Science Publishers, 1979.
2. *Chen Z., Huan G., Ma Y.* Computational methods for multiphase flows in porous media. Society for Industrial Mathematics, 2006. ISBN 0898716063.
3. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М. Эдиториал УРСС, 1999
4. *Balay S., Buschelman K., Eijkhout V., Gropp W., Kaushik D., Knepley M., McInnes L., Smith B., Zhang H.* Petsc users manual. Technical Report ANL-95/11, Argonne National Laboratory, 2004. Revision 2.1.5

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 г.г. (гос.контракт № 02.740.11.0041).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА И ДИАГНОСТИКА ТРЕНИЯ В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ДВИЖЕНИЯ ВАЛА

SIMULATION OF THERMAL PROCESS AND DIAGNOSTICS OF FRICTION IN THE SLIDING BEARINGS WITH ALLOWANCE FOR SHAFT MOBILITY

Васильева М. А.[1], Кондаков А. С., Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия
[1]eowadia@rambler.ru

Тепловая диагностика трения сводится к определению момента трения в подшипниках скольжения. Метод обоснован на том факте, что практически вся механическая энергия, затраченная на трение, трансформируется в теплоту. Этот факт позволяет определять момент трения через фрикционное тепловыделение, которое восстанавливается по температурным данным, регистрируемым в неподвижном элементе узла трения. Соответствующая задача по определению мощности тепловыделения в зоне трения по температурным данным относится к граничным обратным задачам теплообмена. Характерной особенностью обратных задач является их некорректность, заключающаяся в неустойчивости решения к малым погрешностям во входных данных. Подобные некорректные задачи в линейной постановке успешно решаются методами регуляризации [1]. Для решения нелинейных обратных задач формально привлекаются методы решения линейных некорректных задач. При таком подходе возникает необходимость исследования разработанного алгоритма на устойчивость решения по входным данным путем проведения вычислительных экспериментов.

В работах [2,3] фрикционное тепловыделение в подшипнике скольжения вращательного движения восстанавливалось по температурным данным как функция времени при допущении высокой скорости вращения вала, "размазывания" теплового потока по внешней поверхности вала и однородности температуры по зоне контакта. Учитывая существенное различие теплопроводностей металла и полимерного материала, из которого изготавливается антифрикционная втулка, вал считался тепловым стоком. Соответствующее уравнение теплопроводности не содержало конвективного члена, учитывающего движение источника тепла по поверхности вращающегося вала. Скорость вращения вала учитывалась при вычислении коэффициента теплообмена со средой.

В данной работе приводятся математическая тепловая модель и

результаты численных экспериментов по восстановлению мощности фрикционного тепловыделения в подшипнике скольжения по температурным данным с учетом подвижности вала.

Вычислительные эксперименты показали сходимость приближений к точному решению, но качество восстановления ухудшается по мере удаления от центра зоны трения по угловой координате. Наиболее точно функция мощности тепловыделения восстанавливается в центре контактной зоны, где она принимает максимальное значение. Этого достаточно для принятия решений по техническому состоянию узла трения. Проведенные вычислительные эксперименты восстановления интенсивности тепловыделения по точным температурным данным показывают устойчивость решения к вычислительным погрешностям. Расчеты с имитацией погрешности измерения температур показывают, что точность восстановления интенсивности тепловыделения соизмерима с точностью задания температурных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
2. *Старостин Н. П., Тихонов А. Г., Моров В. А., Кондаков А. С.* Расчет триботехнических параметров в опорах скольжения. Якутск: ЯНЦ СО РАН, 1999.
3. *Старостин Н. П., Кондаков А. С., Кондаков А. А.* Восстановление момента силы трения в полимерном подшипнике скольжения по замеру температуры // Трение и износ, 2002. Т. 23, № 5. С. 498–508.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ГРОЗОВЫМИ РАЗРЯДАМИ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧ[1]

MATHEMATICAL MODELING OF THE CURRENT AND VOLTAGE WAVES INDUCED BY LIGHTNING IN TRANSMISSION LINES

Григорьев Ю. М.[1], Борисова М. Н.[2], Артемьева Е. С.[3]

Северо-Восточный федеральный университета, Якутск, Россия
[1]grigyum@yandex.ru, [2]omarfa@mail.ru, [3]artemjeva@mail.ru

Проблема электромагнитной совместимости технических сооруже-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-05-98540), АВЦП (РНП.2.1.1/2555), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (ГК 02.740.11.0248).

ний с атмосферным электричеством в условиях многолетней мерзлоты имеет особую актуальность в силу плохой проводимости грунта. Одним из аспектов этой проблемы являются вопросы повышения эффективности электрозащиты магистральных линий передач. Магистральные линии передач включают в себя трубопроводы, линии электропередачи (ЛЭП) и проводные линии связи. С физической точки зрения магистральные линии представляют собой длинные тонкие проводники, находящиеся в слоистой среде (воздух, проводящая земля и многолетняя мерзлота) и подверженные электрическим наводкам, как во время гроз, так и во время интенсивных геомагнитных возмущений. На магистральных линиях передач токи и напряжения возникают и в отсутствии прямого попадания молнии. Такие токи и напряжения называются индуцированными (наведенными). Имеются два вида индуцированных токов и напряжений. Во–первых, электромагнитной природы - возникающие вследствие влияния электромагнитного поля от внешних возмущений. Во–вторых, электростатической природы, когда под действием электростатического поля грозового облака на проводниках магистральных линий индуцируются электрические заряды. При быстром разряде грозового облака эти заряды "высвобождаются" и, растекаясь по линии передач, образуют волну тока и напряжения (ВТН). Многолетняя практика эксплуатации магистральных линий электропередачи, проводных линий связи на территории РС(Я) показывает, что многие аварийные явления на них вызываются наведенными токами и напряжениями. Некоторые эксплуатационные параметры электрозащиты таких линий зачастую не отвечают нормативным показателям.

Для выработки рекомендаций по защите линий передач от воздействия атмосферного электричества необходимо, в первую очередь, провести анализ возникающих при этом процессов, в частности, оценить величины наведенных токов и напряжений. Общепринятые методы приближенного расчета индуцированных перенапряжений в воздушных линиях основаны на вычислении электромагнитного поля, излучаемого каналом молнии. Практически во всех опубликованных работах при расчете наведенных токов и напряжений учитывают только электромагнитные наводку, а электростатическую часть не учитывают. Однако, по нашему мнению, в регионах с высоким удельным электрическим сопротивлением грунта, к которым относятся и регионы с многолетней мерзлотой, необходимо учитывать электростатическую компоненту (т.е. ВТН) при вычислениях наведенных токов и напряжений. В литературе практически отсутствуют работы по расчету ВТН даже на однопроводных линиях передач.

В данной работе разработаны и вычислительно реализованы математические модели токов и напряжений, индуцированных в линиях передач грозовыми разрядами в условиях многолетней мерзлоты. Математические модели основаны на учете явления ВТН. Обработаны данные натурных измерений токов, наведенных в трубопроводе грозовыми разрядами и найдены численные значения параметров математической модели, адаптированные к данным натурных измерений.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЕРТИКАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ СМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ ИЗ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕД

NUMERICAL SIMULATION OF THE VERTICAL DISPLACEMENT OF MISCIBLE FLUIDS IN FRACTURED POROUS MEDIA

Егорова А. Н.[1], **Тимофеева Т. С.**[2]

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]egorkina_a_89@mail.com, [2]timofeevatc@mail.ru

В данной работе приведены результаты численного исследования процесса вертикального вытеснения смешивающихся жидкостей из трещиновато - пористой среды. Характерная особенность трещиновато-пористой среды состоит в том, что движение жидкости происходит в основном по трещинам, однако объем трещин мал и основные запасы жидкости находятся в пористых блоках. При рассмотрении нестационарных процессов происходит обмен жидкостью между системой блоков и системой трещин. Фильтрация в трещиновато-пористой среде характеризуется наличием двух полей скоростей - в трещинах и в блоках. Данный процесс смешивающегося вытеснения описывается системой уравнений неразрывности для суммарного потока через блоки и трещины, неразрывности растворителя в системе блоков и трещин и обобщенным законом Дарси для суммарного потока [1]. По сравнению с горизонтальным вытеснением при вертикальном– добавляется функция гравитационной сегрегации, определяющее разделение потоков в поле силы тяжести за счет разности плотностей флюидов в блоках и в трещинах [2]. Для численной реализации используются явные разностные схемы. Расчеты показали соответствие полученных результатов

физической картине процесса. При вертикальном вытеснении увеличение нефтеотдачи существенно при увеличении скорости вытеснения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бедриковецкий П. Г., Истомин Г. Д. Князева М. Б.* Смешивающееся вытеснение из трещиновато-пористых сред // Изв. АН СССР МЖГ, 1989. № 6. С. 100–110.
2. *Бедриковецкий П. Г.Истомин Г. Д.* Вертикальное вытеснение смешивающихся жидкостей из трещиновато-пористых сред // Тр. Всес. нефтегаз.НИИ, 1991. Т. 6, № 6. С. 112–127.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ

NUMERICAL ALGORITHM DEVELOPMENT FOR PLANE WAVE MOTION STUDY IN THE COLD AND COLLISIONAL PLASMA

Егорова Е. Р.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
pm_99@mail.ru

Численные методы в исследовании двухжидкостных моделей плазмы являются мощным вспомогательным инструментом для аналитического изучения полной системы уравнений. Необходимость использования численных методов прежде всего обусловливается громоздкостью самой математической модели. В данном случае, при исследовании плоскопараллельных волновых движений в холодной плазме с изотропным давлением электронов численный анализ подтвердил ранее полученные аналитические результаты [1, 3].

В работе произведена разработка нового численного алгоритма для изучения эволюции плоских волн в холодной плазме с учетом силы трения между ионной и электронной жидкостями [2]. Ввиду того, что областью задания переменных является вся числовая прямая, применяется метод координатного отображения, позволяющий отобразить бесконечную прямую в конечный отрезок [4]. Далее на данном отрезке используется псевдо-спектральный метод Чебышева для дискретизации уравнений модели [5]. В итоге, результаты расчета подтвердили распад волны за счет влияния диссипации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахолдин И. Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004.
2. *Егорова Е. Р.* Уравнения холодной столкновительной плазмы в гидродинамическом приближении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: естественные науки, 2010. №1(76) С. 40–47.
3. *Bakholdin I., Il'ichev A., Zharkov A.* Steady magnetoacoustic waves and decay of solitonic structures in a finite-beta plasma // J. Plasma Physics, 2002. V. 67. P. 1–26.
4. *Chester A. Grosch and Steven A. Orszag* Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinate transforms // Journal of Computational Physics, 1977. V. 25, I. 3. P. 273–295.
5. *D. Gottlieb, M. Y. Hussaini and S. A.Orszag* Theory and application of spectral methods In: R. Voigt, D. Gottlieb and M. Y. Hussaini, Editors, Spectral Methods for Partial Differential Equations. SIAM. Philadelphia, 1984. P. 1–54.

РАЩЕПЛЕНИЯ С СОХРАНЕНИЕМ СВОЙСТВ ИСХОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

SPEITTANCE OF DIFFERENCE SCHEME WITH PRESERVATION OF ITS PROPERTIES

Иванов Ф. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
IFVIMI@rambler.ru

Одними из важных свойств разностной схемы являются консервативность и устойчивость [1-3]. Известно, что для устойчивости разностной схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных важное значение имеет согласованность аппроксимации члена с давлением в уравнении движения с членами конвективного потока уравнений. А именно, конвективные члены должны аппроксимироваться против потока, а член с давлением по потоку [1].

Рассмотрим многопараметрическое семейство разностных схем. Применение необходимых условий полной консервативности, выраженных в терминах дифференциального приближения к многопараметрическому семейству разностных схем дает ограничение к числовым параметрам. В данном случае эти ограничения дают полностью консервативную разностную схему. Иными словами необходимые условия полной

консервативности выраженные в терминах дифференциального приближения являются и достаточными. При этом все потоковые члены аппроксимированы согласованным образом. В свою очередь, при условии противопотокой аппроксимации конвективных членов, построенная разностная схема будет условно устойчива. Т. е. условие выполнения свойства полной консервативности является необходимым условием условной устойчивости разностной схемы.

Большой интерес представляет изучение возможности расщепления по физическим процессам алгоритма численного решения поставленной задачи с сохранением тех или иных свойств, которыми обладает исходный алгоритм.

В данной работе разностные схемы расщеплены по физическим процессам с сохранением свойств для двух случаев расщепления по физическим процессам исходного уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных [4-5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Головизнин В.М., Разанов М.А., Самарский А.А., Сороковникова О.С.* Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков. - М.: 1984 (Препр. ИПМ им. Келдыша АН СССР. №56, 1984.)
2. *Шокин Ю. И., Яненко Н. Н.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985.
3. *Ivanov F.V., Fedotova Z.I.* On new classes of completely conservative difference schemes of gas dynamics // Symposium on advanced problems and methods in fluid mechanics. Paland, Mragano, 1987. P. 190–191.
4. *Иванов Ф. В.* Расщепление разностных схем с согласованными потоковыми членами при установлении // Мат. заметки ЯГУ, 2009. Т. 16, № 2. С. 25–31.
5. *Иванов Ф. В.* О согласованности аппроксимации потоковых членов разностной схемы и её устойчивости // Международная конференция. Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезис. Москва, 2009. С. 52–53.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЛАГЕРРА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ДЛЯ ДИССИПАТИВНОГО СЛУЧАЯ

APPLICATION OF A SPECTRAL METHOD OF LAGUERRE FOR NUMERICAL SOLUTION OF SEISMIC FIELDS IN POROUS MEDIA FOR DISSIPATIVE CASE

Имомназаров Х. Х.[1], **Михайлов А. А.**[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
[1]imom@omzg.sscc.ru, [2]alex_mikh@mail.ru

В данном докладе рассматривается эффективный алгоритм численного решения системы линеаризованных уравнений для двухмерной динамической задачи распространения сейсмических волн в пористых средах с учётом диссипации энергии. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей матрицы, скорости насыщающей жидкости, тензора напряжений и давления жидкости. Рассматривается математическая модель пористой среды, предложенная в 1989 году В.Н. Доровским [1]. В отличие от моделей типа Френкеля-Био в линеаризованной модели В.Н. Доровского среда описывается тремя упругими параметрами [2]. Эти упругие параметры взаимно-однозначно выражаются тремя скоростями упругих колебаний. Данное обстоятельство является важным для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда известны распределения скоростей акустических волн, физических плотностей матрицы и пористости.

В этом случае распространение сейсмических волн в пористой средой насыщенной жидкостью при наличии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [2, 3]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0,s}}\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_{0,s}}\chi\rho_{0,l}(u_i - v_i) = F_i,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \chi\rho_{0,l}(u_i - v_i) = F_i,$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ik}div\vec{u} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\delta_{ik}div\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha\rho_0\rho_{0,s})\ div\vec{u} + \alpha\rho_0\rho_{0,l}\ div\vec{v} = 0,$$

$$u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = h_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} = 0,$$

$$h_{22} + p|_{x_2=0} = h_{12}|_{x_2=0} = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} p\Big|_{x_2=0} = 0,$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2)$ - вектора скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_{0,s}$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_{0,l}$соответственно, p - поровое давление, h_{ik} - тензор напряжений, $\vec{F} = (F_1, F_2)$ - вектор массовых сил, $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$, $\rho_{0,s} = \rho^f_{0,s}(1 - d_0)$, $\rho_{0,s} = \rho^f_{0,l} d_0$, $\rho^f_{0,s}$и $\rho^f_{0,l}$- физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, d_0 - пористость, χ - коэффициент межфазного трения, δ_{ik} - символ Кронекера, $K = \lambda + 2\mu/3$,$\lambda > 0$, $\mu > 0$ коэффициенты Ламе, $\alpha = \rho_0\alpha_3 + K/\rho_0^2$, $\rho_0^3\alpha_3 > 0$ - модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие модули K, μ, α_3 выражаются через скорость распространения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} соответствующими формулами [3, 4]:

Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [5, 6], а затем развит и для задач вязкоупругости [7]. Используемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты ω мы имеем параметр $\boldsymbol{m}$ - степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. В отличие от разностного решения в спектрально-разностном методе с помощью аналитического преобразования можно свести исходную задачу к решению дифференциальной системы уравнений, в которой имеются производные только по пространственным координатам. Это позволяет использовать известные устойчивые разностные схемы высокого порядка точности для последующего решения подобных систем. Такой подход является эффективным при решении нестационарных динамических задач для пористых сред. Так, как из-за наличия второй продольной волны с малой скоростью при использовании разностных схем по всем координатам для устойчивости решения необходимо задание согласованного малого шага

дискретизации и по времени, и по пространству, что неизбежно увеличивает объем требуемых вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доровский В. Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика, 1989. № 7. С. 39–45.
2. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science, 1995.
3. *Imomnazarov Kh. Kh.* A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium: I. Excitation of Oscilations of the Magnetic Field by the Surface Rayleigh Wave // Mathl. Comput. Modelling, 1996. Vol. 24, № 1. P. 79–84.
4. *Имомназаров Х. Х.* Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН, 2000. Т. 373, № 4. С. 536–537.
5. *Konyukh G. V., Mikhailenko B. G.* Application of integral Laguerre transformation for solving dynamic seismic problem // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Modeling in Geophysics. Novosibirsk, 1998. № 4. P. 79–91.
6. *Mikhailenko B. G.* Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. 1999. № 12. P. 105–110.
7. *Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A.* Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics, 2001. Vol. 9, № 4. P. 1523–1541.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕГКИХ КЛАСТЕРНЫХ ЯДЕР

MATHEMATICAL MODELING OF THE LIGHT CLUSTER CORES

Исматов Е. И., Сарсенбаев Б. О.

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова
Актобе, Казахстан

В данной работе разработан метод расчета функции профиля через фазовые сдвиги, вычисляемые в квазиклассическом приближении из потенциалов адрон-ядерного взаимодействия. Рассчитаны дифференциальные сечения упругого рассеяния дейтронов путем корректного учета кулоновского взаимодействия в дифракционном приближении.

Как известно в диффракционном подходе амплитуда рассеяния нуклонов определяется Фурье преобразованием профильной функции

$$\omega(\rho) = 1 - \exp[2i\delta(\rho)], \tag{1}$$

где $\rho-$ прицельный параметр, $\delta(\rho)-$ фаза рассеяния,

$$\delta(\rho, E) = k\left\{\int\limits_{b(V_N)}^{\infty} d\vec{r}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\mu V_N(\vec{r}, E)}{k^2}} - \int\limits_{b(0)}^{\infty} d\vec{r}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}\right\}. \tag{2}$$

Здесь $E, k, \mu-$ относительная энергия, волновое число рассеивающий частицы, приведенная масса, соответственно, $b(k)$ и $b(0)-$ корни действительных частей подынтегральных выражений.

При $V_N(r, E) << E$ формулу (2) можно переписать

$$\delta(\rho, E) = -\frac{1}{V}\int d\vec{s}\{ReV_n(r, E) + iImV_n(r, E)\}\sigma, \tag{3}$$

где $\nu-$ относительная скорость нуклона и ядра мишени, $s = \sqrt{r^2 - \rho^2}$.

В области релятивитских энергий с помощью теории многократного дифракционного рассеяния (без учета нуклонных корреляций) можно получить

$$V_N(r, E) = -\frac{2\pi}{E + M}f(0)\rho_N(r), \tag{4}$$

где $f(0) = \frac{k\sigma_t(i+\gamma)}{4\pi}-$ амплитуда нуклон-нуклонного рассеяния на нулевой угол, $\sigma_t = \sigma_t(E)-$ полное сечение нуклон-нуклонного взаимодействия, $M-$ масса нуклона, $\rho_N(r)-$ распределение плотности в ядрах мишени. Параметры σ_t и γ определяется экспериментально.

Такое приближение несущественно для коротко действующего ядерного взаимодействия, но учет одновременного рассеяния кластеров падающей частицы сложной частицы при включении кулоновского взаимодействия между нейтроном-мишенью приводит к логарифмической расходимости некоторых двукратных импульсных интегралов. Это было впервые отмечено Ахиезером и Ситенко.

Таким образом, если учесть, что переданный импульс $\vec{q}$ как это следует из кинематики, на самом деле лишь приближенно перпендикулярен импульсу $\vec{k}$. Хотя составляющая $q_z \equiv \vec{q}\vec{k} - k = 2k\sin^2(\frac{\theta}{2}) \approx (\frac{k}{2}\theta^2)$, где $\theta-$ угол между векторами k и k'(угол рассеяния) мало по величине по сравнению с $q = 2k\sin^2(\frac{\theta}{2}) \approx k\theta$, но ее учет приводит к сходящимся интегралам в общем случае для любого числа заряженных кластеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исматов Е.И.* Теория дифракционных ядерных процессов. Ташкент "ФАН" , 1978.
2. *Исматов Е.И., Сарсенбаев Б.О., Тулепбергенов С.К., Суюндукова Г.А.* Current Problems ir Nuclear Physics and Atomic Energy, Book Abstracts, June 7-12, 2010. Kyiv, Ukraine

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 РАЗВИТИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ СОХРАНЯЮЩИХСЯ СВОЙСТВ

SIMULATION WITH PROBABILITY EQUALLED TO 1 OF THE STOCHASTIC SYSTEM THAT HAS SAVED PROPERTIES

Карачанская Е. В.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия
Chalykh@mail.khstu.ru

Возможно моделирование с вероятностью, равной 1, динамической системы, подверженной винеровским и пуассоновским возмущениям, если известно, что данная система в своем развитии должна сохранять какие-либо свойства, описание которых определяется функционально. Знание таких сохраняющихся функциональных зависимостей позволяет построить систему стохастических дифференциальных уравнений, моделирующей данный феномен. Предложенный метод основан на понятии стохастического первого интеграла для системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито, обобщении формулы Ито-Вентцеля и алгоритме построения автоморфной функции. Особенность получаемого уравнения – нецентрированность пуассоновской меры, определяющей скачкообразную составляющую рассматриваемого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубко В. А.* Открытые эволюционирующие системы // "Відкриті еволюціонуючі системи" міжнар. наук.-практ. конф. (2002, Київ) Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (26-27 квіт. 2002 р.) (Додаток). К.: ВНЗ ВМУРоЛ, 2002. С. 14–31.

2. *Дубко В. А.* Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции // "Відкриті еволюціонуючі системи" міжнар. наук.-практ. конф. (II; 2003, Київ) Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (1-30 грудня 2003 р.) – Том II, К.: ВНЗ ВМУРоЛ, 2004. С. 66–68.
3. *Карачанская Е. В.* Построение множества дифференциальных уравнений, обладающих заданным набором первых интегралов: препринт № 152 Вычислительный центр ДВО РАН / Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2010.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПРОМЕРЗАНИИ

THE NUMERICAL SOLUTION OF FREEZING DEFORMATION PROBLEM

Ларионова И. Г.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
ligira1@rambler.ru

В условиях многолетней мерзлоты, характерных для северных регионов, возникают специфические проблемы, связанные с сохранением устойчивости оснований и конструкций. Прочность данных материалов может быть снижена вследствие больших колебаний температуры внешней среды, которые вызывают в них появление значительных температурных деформаций и напряжений. Эти деформации обусловлены тепловым расширением материалов, а также изменением плотности среды при фазовом переходе от мерзлой зоны к талой. При промерзании водонасыщенных материалов одновременно с теплопереносом происходит массоперенос, связанный с миграцией влаги к фронту промерзания, где выделяется теплота фазового перехода влаги. Влияние его на температурное поле может быть существенным, в связи с этим наряду с теплопереносом необходимо рассматривать и массоперенос.

Рассматривается процесс промерзания цементного стержня достаточно большой длины, находящегося в грунте с температурой $T_c < T_\Phi$, где T_Φ - температура фазового перехода воды в лед:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - m\rho_w q_w \frac{\partial s}{\partial t}$$

Уравнение диффузии:

$$\frac{\partial sc}{\partial t} = D\frac{\partial}{\partial x}\left(s\frac{\partial c}{\partial x}\right) + D\frac{\partial}{\partial y}\left(s\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$

На границе раздела мерзлой и двуфазной зон выполняются:

$$\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right] = m\rho_w q_w L\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\left[D\frac{\partial c}{\partial x}\right] = c_*\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$T_- = T_+ = T_* = -\alpha c_*$$

Задача о деформациях рассматривается как разработка методики численного исследования температурных деформаций для длинного цилиндрического тела, когда задаются температурно-влажностные и силовые воздействия на его поверхности вдоль всей длины.

Вычисление напряжений в каждый момент времени производится в точках, совпадающих с узлами сетки. Интегралы при вычислении деформаций и напряжений заменяются конечными суммами по какой-либо квадратурной формуле, при этом узлы квадратурной формулы совпадают с узлами разностной сетки.

Численная реализация модели производится последовательно: задача тепломассопереноса решается разностным методом, а решение деформационной задачи находится вычислением значений напряжений и деформаций в узлах разностной сетки.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ СУШКИ ОВОЩЕЙ

ABOUT ONE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELING IN TECHNOLOGICAL PROCESS OF THE DRYING VEGETABLES

Маматов Ш. М.

Ташкентский химико-технологический институт
Ташкент, Узбекистан
sherzod_mamatov@mail.ru

Многие виды сырья пищевых производств содержат значительное количество воды. При протекании технологических процессов также

нередко происходит увлажнение полупродуктов производства. Однако продукты, выпускаемые пищевыми производствами, с целью их лучшего сохранения или же с целью увеличения транспортабельности должны содержать минимальное количество влаги. Влага из материалов может быть удалена различными способами: механическим, физико-химическим, тепловым, т.е. сушка. Сушка как способ удаления влаги из материалов получила наиболее распространенные. Самыми распространенными являются следующие виды сушки продуктов: инфракрасная, микроволновая, сублимационная, конвективная, кондуктивная и акустическая. Разновидности конвективной сушки: солнечная, теневая, тепловая. Первые две из них наиболее распространенны в южных районах и являются самыми экономичными с точки зрения расхода тепловой энергии, но продолжительность их достаточно велика, что вызывает ухудшение качества продукции в результате потери цвета, вкуса и аромата, разрушения витаминов, фенольных, красящих веществ. Тепловая сушка применяется во всех регионах.

Сушильный агент – воздух, нагревается с помощью солнечной или электрической энергии, перегретого пара. Теплота, передаваемая сырью, переводит воду в пар, который поглощается сухим воздухом и отводится. Поэтому теплообменные установки – наиболее часто встречаются в промышленных процессах сушки овощей. Ясно, что даже незначительное улучшение их конструкции может дать существенные выгоды. Теплообменные системы часто проектируются многоступенчатыми способами. В этом докладе мы рассмотрим задачу оптимизации многоступенчатых теплообменных систем [1].

Рассмотрим простую систему последовательно соединенных теплообменников, холодный воздух поступает в первую ступень с определенной температурой $z_0^1 = a$ и покидает последнюю ступень с температурой $z_N^1 = b$. На каждой ступени он подогревается горячим поперечным потоком. Входная и выходная температуры горячего потока на n-й ступени будут соответственно t_n^1 и t_n^2. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда WC_p, произведение скорости потока W удельной теплоемкости C_p, одинаково для всех участвующих в процессе потоков. Наша задача будет состоять в выборе такой площади каждого теплообменника, чтобы общая площадь всех теплообменников была минимальной при условии, что z_0^1, z_N^1 и t_n^1, $n = 1, 2, ..., N$, заданы. Уравнение теплового баланса для n ступени имеет следующий вид

$$WC_p(z_n^1 - z_{n-1}^1) = u_n\theta_n(t_n^1 - z_n^1),$$

где u_n- суммарный коэффициент теплоотдачи для n–ой ступени. Раз-

решив это уравнение относительно z_n^1, получаем уравнение преобразования

$$z_n^1 = \frac{z_{n-1}^1 + U_n t_n^1 \theta_n}{1 + U_n \theta_n},\ U_n = \frac{u_n}{WC_p}.$$

Вводя новую переменную состояния z^2, удовлетворяющую уравнению преобразования и начальному условию соответственно имеем $z_n^2 = z_{n-1}^2 + \theta_n \quad z_0^2 = 0$, отсюда с помощью соответствующего выбора последовательности θ_n, $n = 1, 2, 3, ..., N$, можно, минимизировать значение z_N^2- общей площади всех теплообменников.

Нами изучена общая задача, описываемая, линейными дискретными системами и с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина построена оптимальное управление для решения выше поставленной задачи, произведено численное исследование для конкретных видов овощей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* К вопросу о распространении принципа максимума Л.С. Понтрягина на дискретные системы // Автоматика и телемеханика, 1966. №11. С.11–18.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМЕРЗАНИЯ НАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРУЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

MODELING OF FREEZING OF SATURATED FILTERING MEDIUM

Мордовской С. Д.[1], Леверьев В. С.[2]

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]msd@mail.ru, [2]volodya.leveryev@gmail.com

Исследуется температурное поле в недеформирой пористой среде насыщенной жидкостью со слабой концентрацией солей. Для решения таких задач широко используется математическая модель тепломассопереноса с образованием двухфазной зоны фазового перехода [1, 2].

Увеличение объема воды при замерзании в массиве многолетнемерзлых горных пород приводит к сильным перепадам давления, которые могут значительно снизить температуру фазового перехода и вызывать фильтрацию незамерзшей жидкости. Задача усложняется, если учитывать засоленность грунтовых вод и диффузию соли при замерзании воды.

Численное решение такой задачи ввиду слабой сжимаемости компонентов и наличия больших градиентов давления ведет себя крайне неустойчиво. Для преодоления этих сложностей предлагается рассмотреть изменение массы породы за единицу времени:

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} + \frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial M_w}{\partial t} = \frac{\partial (m(1-\beta)\rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial (m\beta\rho_w)}{\partial t} =$$

$$= m\left[(\rho_w - \rho_i)\frac{\partial \beta}{\partial t} + \beta\frac{\partial \rho_w}{\partial t}\right],$$

где M – масса компоненты породы (кг), ρ – плотность (кг/м^3), m – пористость недеформируемого скелета породы, β – влагонасыщенность, а индексы s, i и w означают соответственно скелет породы, лед и воду.

Учитывая слабую сжимаемость воды можно получить перепад давления с помощью:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\alpha\beta\rho_w^0}\left[(\rho_i - \rho_w)\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1}{m}\left(\frac{\partial M_w}{\partial t} + \frac{\partial M_i}{\partial t}\right)\right], \qquad (1)$$

где $\rho_w^0 = 1000$ кг/м^3 – плотность воды при нормальном давлении, а $\alpha_w = 4,62 \cdot 10^{-10}$ 1/Па – эмпирический коэффициент сжимаемости воды.

Для улучшения точности решения численного решения задачи необходимо уменьшение шага пространственной и временной сетки. Это естественно влечет за собой значительное увеличение количества вычислений, что может быть компенсировано запуском расчетов на вычислительном кластере.

Для решения уравнений математической модели применяется метод конечных разностей, а для решения возникающей в результате дискретизации системы линейных алгебраических уравнений используется параллельная библиотека численных методов PETSc (Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г.* Тепломассоперенос в промерзающих и противающих грунтах. – М: Наука. Физматлит, 1996.
2. *Слепцов В. И., Мордовской С. Д., Изаксон В. Ю.* Математическое моделирование теплообменных процессов в многолетнемерзлых горных породах. – Новосибирск: Наука, 1996.
3. *Шпаковский Г. И., Верхотуров А. Е., Серикова Н. В.* Руководство по работе на вычислительном кластере. – Минск: Изд-во БГУ, 2004.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ НЕОТАПЛИВАЕМОГО ГАРАЖА ПОД ЗДАНИЕМ, ВОЗВЕДЕННЫМ НА ПОДСЫПКЕ

PLACEMENT POSSIBILITY PROGNOSTICATION ON TERMS OF PERMAFROST SOIL UNDER UNHEATED GARAGE BUILDED ON BEDDING COURSE

Мордовской С. Д.[1], **Данилов Н. Д.**, **Шадрин В. Ю.**

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]msd@mail.ru

Суровость и длительность холодного периода на Севере вынуждают к поискам теплоэффективных решений зданий и сооружений, возводимых в зоне вечной мерзлоты. Авторами [1] было указано, что можно возводить небольшие здания на вечномерзлых грунтах с непроветриваемыми подпольями. Изменяя высоту, термические сопротивления пола и цокольного перекрытия можно добиться того, что глубина чаши протаивания под зданием не будет превышать естественную глубину оттаивания грунтов оснований. Это идея подвигла к мысли использования подпольного пространства для хозяйственных нужд. В этой работе разработана модель взаимодействия жилого здания с неотапливаемым подпольем (гаражом), возведенного на подсыпке, с многолетними грунтами. Модель учитывает радиационный баланс, интенсивность турбулентного теплообмена земной поверхности с атмосферой, затраты тепла на испарение, тепловой поток в грунт или снег и тепло, идущее на таяние снега, среднемесячные значения элементов климата для данного пункта, теплофизические свойства грунтов. Расчетные параметры здания, такие как тепловой баланс подполья, учитывающий температурные условия помещения, гаража и наружного воздуха, а также размеры здания, термические сопротивления цокольного перекрытия и стенок подполья, интенсивность теплообмена, вводятся после наступления стабилизации температурного режима грунтов основания. Рассмотрены различные варианты расположения гаража под зданием, углубления в грунт, утепления стен. Проведены численные эксперименты для расчета температуры гаража и его теплопотерь, а также глубины чаши протаивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мордовской С.Д., Данилов Н.Д., Павлов Н.Н., Шадрин В.Ю.* Математическое моделирование пространственной задачи теплового взаимодействия зданий с теплыми подпольями с вечномерзлыми грунтами // Современные проблемы строительства и жизнеобеспечения: безопасность, качество, энерго- и ресурсосбережение: тез. докл. I всерос. науч.-прак. конф., 28 мар. 2008 г. / Якутск, 2009. С. 179–186.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАТОДНОГО ПЯТНА ПОЛЕВОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ

MODELLING OF THE CATHODE SPOT OF THE FIELD ELECTRON EMISSING

Никифорова Л. В.[1], Яковлев Б. В.[2]

Северо-Восточный Федеральный университет, Якутск, Россия
[1]nliudmilav@mail.ru, [2]b-yakovlev@mail.ru

В связи с развитием нанотехнологии в настоящее время стала актуальной проблема разработки и проектирования источников заряженных частиц на основе полевой электронной и ионной эмиссии.

Во внешнем электрическом поле при очень высоких напряженностях электрического поля порядка 10^8 В/м с поверхности металла происходит полевая электронная эмиссия. Это явление известно из давних времен, но теория этой электронной эмиссии была разработана в 30-е г. 20-го столетия после создания квантовой механики Фаулером и Нордгеймом на основе квантово-механического метода ВКБ [1]. Теория достаточно хорошо описывает экспериментальные данные, но при режиме отбора больших токов наблюдается некоторое расхождение теории с экспериментом. Большинство специалистов это расхождение связывают с влиянием пространственного заряда пучка источника [2,3].

Полевой электронный катод представляет собой микроострие с радиусом кривизны менее 1 мкм. Поэтому плотность тока источника очень высокая порядка 10^7 А/см^2.

В данной работе катодное пятно ПЭК радиуса r_0 моделируется зоной эмиссии с формой круга в плоском диоде. Электронная эмиссия с поверхности катодного пятна подчиняется известному закону Фаулера-Нордгейма. При этом, на эмиссию влияют пространственный заряд пучка, размер эмиттирующей поверхности, размер и форма пучка, которые в свою очередь, зависят от внешнего и собственного магнитного

полей. Таким образом, для расчета основных характеристик рассматриваемого диода во внешнем магнитном поле необходимо совместно решить уравнения движения, Максвелла, непрерывности и Фаулера-Нордгейма. При расчете траектории крайнего электрона пучка использован метод сшивания на границе пучок-вакуум.

В результате совместного решения рассчитывается траектория крайнего электрона пучка, т.е. форма пучка, распределение плотности заряда и напряженности электрического поля на поверхности катода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Modinos A.* Field thermoionic and secondary electron emission spectroscopy. New. Jort: Plemim Press, 1984.
2. *Fowler R. H., Nordheim L. W.* Electron emission in intense electric field // Proc. Roy.Soc. (London), 1928. A 119, № 781. C. 173–181.
3. *Dyke W.R., Trolan J.K.* Field emission: Large current densites, space charge and the vacuum arc // Phys. Rev. 89., 1953. № 4. C. 799–807.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГИИ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СТВОЛА СКВАЖИНЫ ПРИ РАЗРАБОТКЕ НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

ANALYTICAL MODEL OF THE HORIZONTAL BOREHOLE IMPULSE ELECTROMAGNETIC LOGGING TECHNOLOGY ON THE DEVELOPMENT OF OIL-AND-GAS DEPOSIT

Ним Ю. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
gmpirmpi@mail.ru

Одна из проблем современной промысловой геофизики связана с недостаточным информационным сопровождением непрерывно увеличивающегося количества строительства горизонтальных скважин при разработке нефтегазовых месторождений. Это обусловлено тем, что базовые модели теоретического обеспечения технологии каротажа обычных, вертикальных скважин в большинстве случаев невозможно перенести на плоскопараллельную геометрию системы: горизонтальная скважина – горизонтально – слоистый нефтегазовый коллектор [1,2,3]. В этой связи обнажились задачи моделирования технологий геофизических исследований горизонтальных скважин (ГИГС), в частности в области электромагнитного каротажа.

Фундамент технологий – прямые задачи, одна из которых рассмотрена М.И. Эповым с соавторами [3], в которой оценивается возможность геонавигации при бурении горизонтального ствола флюидонасыщенного участка скважины высокочастотным электр омагнитным зондированием наносекундными импульсами.

В отличие от указанной работы рассмотрим математическую модель технологии импульсного «горизонтального» каротажа нефтегазового коллектора в режиме зондирования в более широком диапазоне частот, захватывая область неустановившегося процесса с целью расширения возможностей ГИГС. Модель коллектора представим в виде двух плоскопараллельных слоёв комплексной электропроводности $K_1 8 K_2$, возбуждаемого импульсным электрическим диполем, расположенным внутри системы, в начале цилиндрической системы координат (r, φ, z), совмещенной с декартовой (x, y, z). Момент диполя $P_x = i\omega I dx = i\omega P_0$, ориентирован параллельно слоям по оси «x»; ω-круговая частота, I- сила тока, dx-элемент длины диполя, i - мнимая единица, P_0- амплитуда момента диполя, $K_1 = S_1 + D_1$, $K_2 = S_2 + D_2$, $S_{1,2} = \lim \gamma_{1,2}\ell_{1,2}$ при $\gamma_{1,2} \to \infty, \ell_{1,2} \to 0, D_{1,2} = \lim \varepsilon_{1,2}\ell_{1,2}$ при $\varepsilon_{1,2} \to \infty, \ell_{1,2} \to 0, S_{1,2}, D_{1,2}$ - соответственно, продольная электропроводность, продольная диэлектрическая проницаемость соответствующих слоев,$\gamma, \varepsilon, \ell$ - соответственно, электропроводность, диэлектрическая проницаемость, толщина слоя. Слой K_1 имеет координату $z = h$, слой $K_2 - z = -H$.

Представленная геометрическая модель описывается двухкомпонентным электромагнитным скалярным уравнением Гельмгольца [4,5]

$$\nabla^2 A_{z,x} - k^2 A_{z,x} = 0,$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu + i\omega\mu\gamma$- волновое число, μ - магнитная проницаемость, $A_{z,x}$- компоненты вектор – потенциала, вводимого уравнением $B = rotA; B$- магнитная индукция. На плоскостях $K_{1,2}$ волновое уравнение вырождается в граничное условие, а вне плоскостей- в уравнение Лапласа [5]

Применяя метод разделения переменных, получим выражение вида:

$$A(\omega) = \frac{P_0 dx}{4\pi} \int_0^\infty \frac{V}{W} J_0(mr)\, dm,$$

где $V = p^4 \bar{q}_H e_z + p^3 \bar{q}_H \eta e_z - p^2 \left\{ \left[\frac{2m}{\mu D_2 q} - \eta_1 \eta_2 \bar{q}_H \right] e_z - \right.$

$$\left. - \frac{2m}{\mu D_1} \bar{q}_H e^{-mz} \right\} + p \left[\frac{2mS_1}{\mu D_1 D_2 q} e_z - \frac{2mS_2}{\mu D_1 D_2} \bar{q}_H e^{-mz} \right] + \frac{4m^2}{\mu^2 D_1 D_2 q}.$$

$$W = p^4 + p^3\eta + p^2\left(\frac{2m}{\mu q}\frac{D}{D_1 D_2} + \eta_1\eta_2\right) + p\frac{2m}{\mu q}\frac{S}{D_1 D_2} + \frac{4m^2}{\mu^2 D_1 D_2 q}, q = 1 - e^{-2md},$$

$q_H = 1 - e^{-2mH}$, $\bar{q}_H = q_H/q$, $e_z = e^{mz} + e^{-m(2h-z)}$, $\eta_1 = \frac{S_1}{D_1}$, $\eta_2 = \frac{S_2}{D_2}$, $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $D = D_1 + D_2$, $S = S_1 + S_2$, $p = i\omega$. Дисперсионные свойства среды (по Дебаю) учитываются вводом в волновое число функции $D^* = D^1 - iD''$ D', D'' - соответственно, действительная, мнимая компонента параметра D [4].

Используя спектральный метод анализа импульсного возбуждения и табличные данные интегрального преобразования Лапласа – Карлсона [6], получим выражение, описывающее импульсное электромагнитное поле во временной области в виде однократного интеграла $A(t) = \int_0^\infty F(\eta, \bar{q}_H, m, \exp[-\eta, t]) J_0(mr)\, dm$, где $J_0(mr)$ - функция Бесселя нулевого порядка, m- переменная интегрированная. Параметр $1/\eta = \tau = \frac{D_1+D_2}{S_1+S_2}$, согласно Максвелла, представляющий время релаксации среды комплексной электропроводности, становится признаковым объектом определения в импульсной электроразведке. Импульсное электромагнитное поле зависит от комплексных параметров среды, времени релаксации координат точек наблюдения и времени наблюдения – прогнозных параметров, определяющих состояние и строение системы – коллектора. По времени наблюдения определяется характер электромагнитного процесса в комплексной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савин А.Д.* Геофизические исследования горизонтальных скважин. Состояние и проблемы // Каротажник №2. Тверь, 2010. С.16–37.
2. *Поляченко А.Л., Бабкин И.В.* Вопросы теоретического и интерпретационного обеспечения электрических и ядерных методов ГИС в горизонтальных и наклонных скважинах // Ядерно-геофизические технологии в комплексе ГИС при исследовании наклонных и горизонтальных скважин. Современное состояние в России и СНГ, перспективы развития методов и технологий. Москва: ООО ЦИТП, 2007. С. 10–11.
3. *Эпов М.И., Миронов В.Л., Комаров С.А., Музелевский К.В.* Электромагнитное зондирование флюидонасыщенного слоистого коллектора наносекундными импульсами. Геология и геофизика, 2007. Т. 48, №12. С. 1357–1365.

4. *Ним Ю.А.* Теоретическое обеспечение инновационной технологии импульсного электромагнитного зондирования комплексной среды при ее возбуждении горизонтальным электрическим диполем // Инфомационные технологии в науке, образовании и экономике: тез. докл. II всерос. науч. конф. / Якутск. гос. ун-т. – Якутск, 2007. С. 52–55.
5. *Ваньян Л.Л.* Основы электромагнитных зондирований. М.: Недра, 1965.
6. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.

СИСТЕМА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СВОДНОГО ИНДЕКСА ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ЦЕН ПО ВИДАМ ТОВАРОВ И УСЛУГ

SYSTEM OF ECONOMETRIC MODELS FOR FORECASTING OF THE COMPOSITE INDEX OF CONSUMER PRICES ON GOODS AND SERVICES

Охлопков Г. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
Gavril_nik@mail.ru

Разработанная система моделей прогнозирования сводного индекса потребительских цен состоит из двух блоков: блока прогнозирования доходов и расходов населения и блока прогнозирования индекса потребительских цен.

Блок прогнозирования доходов и расходов населения представляет собой систему регрессионных уравнений:

$$\begin{cases} YD_{t+1} = f(t) \\ CP_{i,t+1} = \alpha \cdot YD_{t+1} + \beta \cdot CP_{i,t} + \gamma \\ CP_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} CP_{i,t+1}, i = \overline{1,n} \end{cases} \quad (1)$$

где YD_t– денежные доходы населения; $CP_{i,t}$ – расходы населения на покупку i-го вида товара или услуги.

На первом этапе рассчитываются прогнозные значения доходов населения на основе фактических значений показателя доходов населения, для чего выявляется основная тенденция процесса, выражающаяся экстраполяционной функцией f(t). Метод экстраполяции основыва-

ется на распространении закона изменения функции из области ее наблюдения на область, лежащую вне отрезка наблюдения. Главным этапом экстраполяции тренда является выбор оптимального вида функции, описывающей эмпирический ряд. Задача выбора функции заключается в подборе по фактическим данным (x_i, y_i) формы зависимости (линии) так, чтобы отклонения данных исходного ряда y_i от соответствующих расчетных $y\prime_i$, были наименьшими. Расчет параметров (,) для конкретной функциональной зависимости осуществляется методом наименьших квадратов. В качестве функции экстраполяции использована полиномиальная функция второго порядка, как наиболее точно описывающая исходный ряд данных. Далее на основе второго уравнения системы (1), рассчитаны прогнозные значения расходов населения на покупку i-го вида товаров или услуг. Полученные прогнозные значения использованы при расчете прогнозного значения совокупного расхода населения.

Блок прогнозирования индекса потребительских цен по видам товаров и услуг представляет собой систему взаимосвязанных эконометрических уравнений:

$$\begin{cases} cpi_{i,t} = \alpha + \beta \cdot cpi_{i,t-1} + \gamma \cdot cpi_{i,t-2} \\ cpi_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} cpi_{i,t+1} \cdot CP_{i,t+1}}{CP_{t+1}}, i = \overline{1,n} \end{cases} \quad (2)$$

где $cpi_{i,t}$ – индекс потребительских цен i-го вида товара или услуги; cpi_t – сводный индекс потребительских цен товаров и услуг.

Первое уравнение системы (2) представляет собой авторегрессионное уравнение второго порядка и применяется для расчета прогнозных значений индексов потребительских цен на продовольственные, непродовольственные товары и платные услуги. Второе уравнение системы (2) используется для расчета сводного индекса потребительских цен.

На основе системы эконометрических моделей (1)-(2) проведены прогнозные расчеты индекса потребительских цен. Сравнительный анализ полученных прогнозных значений с фактическими данными показал их достаточно высокую точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородич С. А* Эконометрика: Учебное пособие.С.А.Бородич.– 2-е изд. испр. Мн.: Новое знание, 2004.
2. Методологические положения по статистике. Вып. 3. Госкомстат России. М., 2000.

О ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ УГЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НАРУЖНЫХ ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

ON THE NUMERICAL COMPUTATION OF THE EXTERNAL FILLER STRUCTURE CORNER CONNECTION TEMPERATURE FIELD

Павлов Н. Н.[1], **Шадрин В. Ю.**[2]

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]pnn10@mail.ru, [2]vshadr@mail.ru

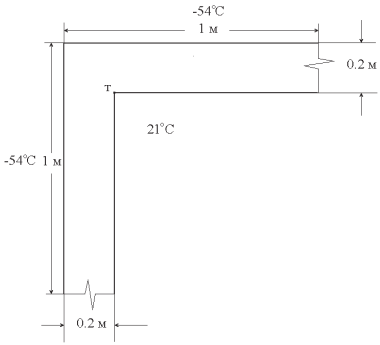


Рис. 1. Эскиз угла наружной стены

При проектировании зданий и сооружений важное значение придается точному прогнозированию температуры во внутренних углах помещений, так как в них чаще всего может выпадать конденсат. В данной работе проведен анализ применения итерационных методов Зейделя и сопряженных градиентов [1] для решения систем уравнений метода сеток, аппроксимирующих третью краевую задачу для двумерного и трехмерного уравнений Лапласа. Результаты численных экспериментов показывают, что при расчете температурного поля перпендикулярных угловых элементов даже однородных наружных ограждающих конструкций для получения истинного значения температуры угла необходимо внимательно следить за соотношениями между размерами сетки, разностями соседних итераций, разностями между тепловыми потоками через наружную и внутреннюю поверхности ограждений. Ситуация сильно осложняется при расчете температурных полей неоднородных наружных ограждающих конструкций с тысячекратными перепадами значений коэффициентов теплопроводности соседних различных материалов. Приведем результаты расчета для однородного двумерного угла из сосны (коэффициент теплопроводности $\lambda = 0{,}14$ Вт/(м· град)) толщиной 0,2 м и длиной 1 м (Рис.1.). Температура наружного воздуха T_{ext} принята равной -54^0C, температура внутреннего воздуха $T_{int} = 21^0C$.

Коэффициенты теплообмена конструкции с наружным воздухом и внутренним воздухом соответственно равны α_{ext}= 23 Вт/(м^2·град) и α_{int}=8,7 Вт/(м^2· град). В таблице приведены результаты расчетов для $\varepsilon = 10^{-6}$, где $\varepsilon = \|T^k - T^{k-1}\|$ - разность между соседними итерациями в равномерной норме, k - число итераций, $\Delta Q = |Q_{ext} - Q_{int}|$ - разность потоков через наружную (Q_{ext}) и внутреннюю (Q_{int}) поверхности, вычисленные по полученному температурному полю, t - время расчета, T - температура внутреннего угла.

Таблица

	Метод Зейделя			
Сетка	k	ΔQ	t	T
50×50	375	$1.83 \cdot 10^{-4}$	1 сек.	8,298
100×100	1358	$6.38 \cdot 10^{-4}$	3 сек.	7.966
500×500	25516	$8.57 \cdot 10^{-3}$	21 мин.	7.767
1000×1000	87404	$3.54 \cdot 10^{-2}$	4 ч. 45 м.	7.759
2000×2000	290847	$1.46 \cdot 10^{-1}$	75 часов.	7.767

	Метод сопряженных градиентов			
Сетка	k	ΔQ	t	T
50×50	101	$4.18 \cdot 10^{-7}$	<1 сек.	8.298
100×100	173	$8.07 \cdot 10^{-7}$	1 сек.	7.966
500×500	702	$1.62 \cdot 10^{-5}$	39 сек.	7.766
1000×1000	1369	$1.74 \cdot 10^{-5}$	5 мин.	7.755
2000×2000	2661	$2.28 \cdot 10^{-5}$	35 мин.	7.751

Трудности расчета температуры вблизи угловых точек заключаются, по-видимому, в больших значениях второй производной температуры, когда расчетная область имеет внутренний угол, больший чем 180 градусов [2], которые для приведенного примера составляют величину порядка $3,1 \cdot 10^5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции - диффузии. Эдиториал УРСС, Москва, 1999.
2. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ОХЛАЖДАЮЩИХ УСТРОЙСТВ В НАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ

A MODEL PROBLEM OF CONVECTIVE HEAT TRANSFER OF COOLING DEVICES IN A SATURATED ENVIRONMEN

Павлова Н. В.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
npav@rambler.ru

Одной из актуальных задач при строительстве и эксплуатации подземных алмазодобывающих рудников является прогнозирование температурного состояния горных пород вмещающих вертикальные стволы. Решение задачи теплообмена в околоствольном пространстве усложняется тем, что обычно слои ММГП включают фильтрующиеся водонасыщенные пласты высокоминерализованных вод, имеющих весьма низкие температуры замерзания. Наличие глубокого карьера вызывает разгрузку флюидов через борта карьера, что обуславливает усиление фильтрации в этих пластах. В таких условиях обязательным условием сохранения устойчивости устьевой части ствола является замораживание грунтов и создание противофильтрационной завесы в виде льдопородного цилиндра вокруг ствола путем замораживания системой охлаждающих устройств.

В работе рассматривается взаимодействие ствола и замораживающей системы охлаждающих устройств нагнетательного типа, с учетом фильтрации и засоленности пород.

На дневной поверхности происходит теплообмен с наружным воздухом, вследствие которого происходит сезонное протаивание. В самом стволе поддерживается постоянная положительная температура зимой ($+10^0$C), а летом равна температуре воздуха. Вследствие движения поровой влаги, распространение тепла описывается нестационарным уравнением конвективной теплопроводности, а также уравнением фильтрации упругой жидкости в деформируемой пористой среде. Оба уравнения связываются зависимостью проницаемости от льдонасыщенности и решаются совместно.

Для численного решения поставленной задачи, определенной в области со сложной геометрией, используются метод фиктивных областей и итерационные методы вариационного типа.

Данная задача было поставлена для практического использования – оценки несущей способности свай и устойчивости ствола рудника «Интернациональный». Поэтому в качестве исходных данных используются лабораторные данные этого рудника, а также должны учитываться его особенности.

ПРОГНОЗ РАЗВИТИЯ ЭКЗОГЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ОСНОВАНИИ НЕФТЕГАЗОПРОВОДА

PREDICTION OF THE DEVELOPMENT OF EXOGENOUS PROCESSES IN THE OIL AND GAS PIPELINE BASE

Пермяков П. П.[1], Аммосов А. П.[2], Попов Г. Г.[3]

Институт физико-технических проблем Севера СО РАН имени В.П. Ларионова, Якутск, Россия

[1]p.p.permyakov@iptpn.ysn.ru, [2]ammosov37@mail.ru, [3]g.g.popov@mail.ru

Строительство трубопроводных систем нефтепровода Восточный Сибирь – Тихий Океан (ВСТО) сопровождается техногенным нарушением тепловлажностного грунтового основания, что приводит к нежелательным мерзлотным процессам: термокарст, термоэрозия, термопросадки и пучения. В данной работе в связи с этим приводятся математическая модель тепловлажностных процессов в мерзлых грунтах и результаты численного эксперимента по прогнозу экзогенных процессов в основании нефтепровода ВСТО.

Тепловлагоперенос описывается системой двух нелинейных уравнений в прямоугольной области. Двумерные уравнения с учетом итерации расщепляются на одномерные задачи и реализуются методом направленных разностей. Исходные данные для численного расчета взяты из местных метеостанций и инженерно-изыскательных работ просеки.

Численный эксперимент водного режима грунтов производен с учетом количества порового раствора карбонатных пород, осадков и испарения. В результате численного эксперимента установлено, что процесс миграции пленочной и капиллярной влаги играет основную роль в формировании морозного пучения. Величина пучения в течение зимы монотонно растет за счет миграции поровой влаги к фронту промерзания. В мае при поступлении снеговой воды наблюдается резкое

увеличение объема (набухание) верхних слоев деятельного слоя. В летние месяцы (июнь÷август), когда идет интенсивное испарение влаги, за счет высыхания верхних слоев грунта происходит усадка деятельного слоя. Осенние дожди (сентябрь) останавливают процесс осадки от высыхания. Весь вышеуказанный процесс каждый год циклически повторяется. Амплитуда сезонного колебания поверхности деятельного слоя равна 5 см.

"Сезонное расшатывание" магистрального газопровода по сравнению с поверхностью грунта идет с некоторым опозданием. Амплитуда сезонного колебания равна 3,8 см. Пиковые значения расшатывания наблюдаются в конце мая – максимальное и в начале ноября – минимальное. Общий ход данного численного эксперимента хорошо согласуется с данными натурного наблюдения.

Общая осадка нефтепровода состоит из двух слагаемых. Первая слагаемая учитывает относительную просадочность льдистых отложений без нагрузки. Второе выражение рассчитывается при различных значениях коэффициента сжимаемости грунта и внешней нагрузки.

Из численного эксперимента установлено, что без изоляции процесс осадки нефтепровода усиливается, т.е. наличие теплоизоляции существенно погашает распространение тепла вокруг нефтепровода. В процессе 35-летней эксплуатации нефтепровода без изоляции (при $\alpha = 0,07$ МПа$^{-1}$) образуется чаша протаивания глубиной 11,7 м, что сопровождается максимальной просадкой нефтепровода на 0,45 м. А при теплоизоляции в конце 35-летней эксплуатации глубина чаши протаивания равна 7,6 м, а величина максимальной осадки – 0,37 м. Для стабилизации деформационного состоянии нефтепровода следует также провести противотермокарстовые мероприятия.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОСОЛЕВЛАГОПЕРЕНОСА ПРИ РЕКОНСТРУКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СООРУЖЕНИЙ

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT AND MOISTURE TRANSPOSITION IN RECONSTRUCTION OF LINEAR STRUCTURES

[1]Пермяков П. П., Резцова А. Н.

Якутский государственный инженерно-технических институт
Якутск, Россия
[1]p.p.permyakov@iptpn.ysn.ru

Для большинства инженерных сетей водоотведения и водоснабжения городов истекли гарантийные сроки эксплуатации, морально устарели и не удовлетворяют современным нормативным требованиям. Проблемы оперативного ремонта, восстановления, модернизации инженерных сетей в современном городе усугубляются рядом подобных причин: высокой плотностью застройки подземных и наземных объектов, наличием параллельных и пересекающихся на разных уровнях инженерных коммуникаций, насыщенностью окружающих грунтов подземными водами (криопэгами) и т.д. Долговечность, устойчивость и качество строительства зависит от сохранности грунтов в мерзлом состоянии. В связи с этим возникает необходимость разработки нового комплекса программ для численного решения задач теплосолевлажностного режима грунтов оснований вокруг линейных сооружений (водоотводящих сетей).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПУЧЕНИЯ И ОСАДКА В ПРОМЕРЗАЮЩИХ-ПРОТАИВАЮЩИХ ГРУНТАХ

MATHEMATICAL MODELS OF HEAVING AND SETTLING OF FROZEN – THAWING SOILS

Пермяков П. П.[1], Попов Г. Г.[2], Матвеева М. В.[3]

[1,2]*Институт физико-технических проблем Севера СО РАН имени В.П. Ларионова, Якутск, Россия*
[1]p.p.permyakov@iptpn.ysn.ru, [2]g.g.popov@mail.ru
[3]*Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
m-mayza@mail.ru

Циклическое промерзание и протаивание дисперсных грунтов часто

сопровождаются деформацией (поднятием и опусканием) их поверхности, т.е. пучением и осадкой поверхности грунта. При промышленном освоении территории особую опасность для инженерных сооружений представляет не абсолютное значение этих деформаций, а их неравномерность по площади.

Величину пучения, используя суммарную объемную влажность θ, можно описать следующим образом:

$$S = \int_0^l (\theta - n)dx, \tag{1}$$

где l – глубина рассматриваемой области; $\theta = \theta(x, \tau)$ – суммарная объемная влажность; n – пористость грунта.

Аналогично можно оценить величину осадка при протаивании мерзлого грунта:

$$S = k\xi + \alpha(P + 0,5\rho_{\text{ск}}(1 + W)\xi)\xi, \tag{2}$$

где ξ – ореол оттаивания грунта в основании трубопровода, м; k – коэффициент оттаивания мерзлых грунтов (относительная осадка без нагрузки); α – коэффициент сжимаемости, МПа$^{-1}$; P – давление на оттаявший грунт, МПа; $\rho_{\text{ск}}$ – объемная плотность скелета, кг/м^3; W – весовая суммарная влажность ($W = W_{\text{л}} + W_{\text{в}}$), д.е.; $W_{\text{л}}$, $W_{\text{в}}$ – весовая влажность за счет льда и воды.

Вывод формул основан на предположении, что расширение (уплотнение) объема грунта происходит по высоте (по направлению к поверхности грунта) вследствие увеличения порового вещества за счет перехода воды в лед, т.е. без возможности бокового расширения, как это принимается в задаче о компрессионном уплотнении грунтов.

Параметры θ, ξ, входящие в формулы (1)–(2), определяются из решения системы совместных уравнений тепловлагообмена. Остальные исходные параметры k, P, n, α задаются с учетом физико-механических свойств грунта. Суммарная объемная влажность θ выражается через весовую влажность следующим образом:

$$\theta = \frac{\rho_{\text{ск}} W}{\rho_{\text{л}}\rho_{\text{в}}}(\rho_{\text{л}} + (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) \cdot i(T)),$$

где $\rho_{\text{л}}$, $\rho_{\text{в}}$ – удельная плотность льда и воды, кг/м^3; $i(T)$ – льдистость грунта $\left(i(T) = \dfrac{W_{\text{л}}}{W}\right)$.

Приводятся результаты численного эксперимента при различных исходных данных. За критерий неравномерности, например, площадного пучения, обычно принимается процентное отношение превышения величины пучения одной точки над величиной пучения другой к расстоянию между ними. Пучение промерзающих пород может происходить в условиях "открытой" (с подтоком влаги из водоносного горизонта) и "закрытой" (без подтока влаги извне) систем.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

SOLUTION METHOD OF THE DIRECT AND INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEMS ON BASIS OF THE DIFFERENTIAL-DIFFERENCE HEAT TRANSFER MODELS

Пилипенко Н. В.[1], Гладских Д. А.

Национальный исследовательский университет,
Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий механики и оптики
Санкт-Петербург, Россия
[1]pilipenko38@mail.ru

Рассматривается метод решения прямых и обратных задач теплопроводности на основе дифференциально-разностных моделей теплопереноса применительно к восстановлению плотности нестационарного теплового потока и уточнения теплофизических свойств материалов объектов исследования. Для минимизации функции невязки между модельным и измеренным значениями используется фильтр Калмана по искомым параметрам. Расчеты и эксперименты показали его устойчивую сходимость, приемлемую точность восстановления теплового потока и общность по отношению к различным типам приемников. Рассмотрены методические погрешности нестационарной теплометрии. Показано, как на основе полученных при моделировании матриц Грамма, можно построить совместные доверительные области или интервалы, в которые с доверительной вероятностью попадают оценки искомых параметров. Предложено использовать метод априорных исследований для рационального выбора значимых факторов нестационарной теплометрии. Критерием выбора являются априорные совместные доверительные интервалы оценок идентифицируемых параметров

на участках сплайн-аппроксимации нестационарного потока. Показано, что существенное влияние на погрешность восстановления потока при решении обратной задачи теплопроводности оказывает расположение точек измерения температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилипенко Н. В., Сиваков И. А.* Метод определения нестационарных тепловых потоков и теплопроводности путем параметрической идентификации. Измерительная техника, 2011. №3. С. 48–51
2. *Пилипенко Н. В., Кириллов К. В.* Определение нестационарных условий теплообмена в энергетических установках // Приборы, 2008. №9. С. 21–25.
3. *Пилипенко Н. В.* Методические погрешности определения нестационарных условий теплообмена при параметрической идентификации // Измерительная техника, 2007. №8. С. 54–59.
3. *Pilipenko N.* Parametrical identification of differential-difference heat transfere models in non-stationary thermal measurements // Heat transfer Research, 2008. V. 39, №. 4. P. 311–315.

ВОПРОСЫ РАЗРАБОТКИ ТЕХНОЛОГИИ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

THE DEVELOPMENT OF ECONOMETRIC MODELING TECHNOLOGY

Романова Е. В., Тихонов А. Г.[1]

Якутский экономико-правовой институт, Якутск, Россия
[1]tihonov49@inbox.ru

Технологию эконометрического исследования можно представить как совокупность методов нахождения параметров моделей и оценки статистической значимости разрабатываемых моделей с целью выбора подходящей. Результатом эконометрического моделирования является модель, адекватная исходным и эмпирическим данным.

Построение адекватных моделей обеспечивает в современной экономике возможность принятия эффективных управленческих решений, снижения риска и повышения точности прогнозирования.

Нами, в рамках указанного подхода, рассмотрены некоторые эконометрические модели с визуальным отображением результатов.

КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ МАГНИТНОГО ОБЛАКА

THE QUASISTATIONARY MODEL OF MAGNETIC CLOUD STRUCTURE

Ромащенко Ю. А., Шарин Е. П.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
romash37@mail.ru, esharin@yandex.ru

Одним из интересных объектов околосолнечного пространства являются так называемые магнитные облака. Анализ большого фактического материала, полученного в 1974 – 1981 годах на космических аппаратах Helios 1 и 2, Voyager и IMP позволили остановиться на модели магнитных облаков, как крупномасштабных расширяющихся квазицилиндрических трубок магнитного потока. Изучение данных по солнечному ветру с различных космических аппаратов показало, что магнитные облака являются сравнительно общим феноменом в солнечном ветре [1-3]. Очень часто (но не всегда) магнитные облака связаны с межпланетными ударными волнами [1,4]. Магнитные облака, пересекающие орбиту Земли, могут вызывать в её окрестности интенсивные магнитные бури [4-8]. Отсюда понятен интерес к магнитным облакам исследователей, занимающихся солнечно-земной физикой, особенно в области прогнозирования космической погоды. Получено точное аналитическое решение, описывающее протяженную (но компактную в радиальном направлении) структуру с бессиловым магнитным полем. Показано, что такая структура может быть реализована, если бессиловое магнитное поле этой структуры будет погружено во внешнее фоновое магнитное поле. Результаты работы могут представлять определенный интерес для иллюстрации существующих возможностей, которые могут реализовываться в солнечном ветре, и других астрофизических, геофизических, а также лабораторных ситуациях с плазмой низкого газового давления

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klein L.W., Burlaga L.F.* Interplanetary magnetic clouds at 1 AU // J. Geophys. Res, 1982. V. 87. P. 613–624.

2. *Burlaga L.F., Behannon K.W.* Magnetic clouds: Voyager observations between 2 and 4 AU // Sol. Phys, 1982. V. 81. P. 181.
3. *Burlaga L.F.* Magnetic clouds // in Physics of Inner Heliosphere. Berlin, Heidelberg: Springer -Verlag, 1991. P. 1–22.
4. *Zhang G., Burlaga L.F.* Magnetic clouds, geomagnetic disturbances and cosmic ray decreases // J. Geophys. Res, 1988. V. 93. P. 2511–2518.
5. *Wilson R.M.* Geomagnetic response to magnetic clouds // Planet. Space Sci, 1987. V. 35, P. 329–335.
6. *Tsurutani B.T., Gonsalez W.D., Tang F., Lee Y.T.* Great magnetic storms // Geophys. Res. Lett, 1992. № 9. P. 73–76.
7. *Bothmer V.* Die Strukturmagnetischer Wolken in Sonnenwind-Zusammen Einfluss auf die Magnetosphare der Erde // Ph.D Thesis : University Gottingen, 1993.
8. *Bothmer V. Schwen R.* The interplanetary and causes of major geomagnetic storms // J. Geomagn. Geoelectr, 1995. V. 47, P. 1127–1132.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ПОЛУПРОЗРАЧНОГО СЛОЯ ПРИ РАДИАЦИОННОМ НАГРЕВЕ

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER IN A SEMITRANSPARENT LAYER BY RADIATIVE HEATING

Саввинова Н. А.[1], Рубцов Н. Н.[2], Слепцов С. Д.[2]

[1] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
nasavv@mail.ru.
[2] *Институт теплофизики имени С.С.Кутателадзе СО РАН Новосибирск, Россия*
s_sleptsov@itp.nsc.ru.

Сложные процессы нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных футеровках стекловаренных печей, теплозащитных полупрозрачных для теплового излучения покрытиях технических устройств, слое ледяного покрова при радиационном нагреве в процессе их плавления и последующего уноса вещества при взаимодействии с окружающей средой моделируются как однофазная задача Стефана в слое полупрозрачной среды. Математическая модель задачи представляет уравнение радиационно-кондуктивного теплообмена в исследуемой полупрозрачной среде с условием Стефана на границе раздела фаз.

В работе исследуется нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца из полупрозрачной среды с коэффициентом объемного поглощения излучения α и теплопроводностью λ. Границы плоского образца частично поглощают, отражают и пропускают излучение таким образом, что $A_i + R_i + D_i = 1$, $i = 1, 2$, где A_i, R_i, D_i – значения полусферических коэффициентов поглощения, отражения и пропускания соответственно. При этом предполагается справедливость закона Кирхгофа, $A_i = \varepsilon_i$, где ε_i – степень черноты границ.

Решение краевой задачи включает в себя два этапа. Первый этап сводится к рассмотрению нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в процессе нагрева серого полупрозрачного образца с плоскопараллельными границами. На втором этапе, при достижении правой границей образца температуры плавления, рассматривается непосредственно задача Стефана. Предполагается, что образующаяся при этом на границе жидкая фаза сублимируется и уносится конвективным образом. Положение границы раздела фаз определяется из решения краевой задачи, которое сводится к определению полей температур и плотностей потоков в слое твердой фазы с изменяющейся толщиной. В процессе численного моделирования определялись температурное поле и поле плотности потока излучения в полупрозрачной серой среде.

Коэффициенты отражения поверхностей на обеих границах $R_{1,2} = 0.1$. При моделировании задачи радиационно-кондуктивного теплообмена степень черноты границ полагаем равным $\varepsilon_{1,2} = 0$, при переходе на задачу Стефана значение степени черноты на правой облучаемой поверхности меняем в пределах $\varepsilon_2 = [0.01 \div 0.1]$. Такой подход позволяет смоделировать ситуацию, при которой поверхностные слои материалов, претерпевающих фазовые переходы 1-го рода, меняют свои оптические свойства.

Результаты численных экспериментов свидетельствуют о существенном влиянии на процесс плавления даже незначительных отклонений степени черноты движущейся поверхности ($\varepsilon_2 = 0.01 \div 0.1$), претерпевающей фазовый переход, от своего первоначального значения $\varepsilon_2 \equiv 0$, принимаемого в процессе радиационно-кондуктивного нагрева пластины. Указанное обстоятельство является принципиально важным при построении реальной модели фазового перехода, учитывающей структурные изменения материала на фронте фазового превращения. В условиях искусственного зачернения движущейся границы полупрозрачная пластина может рассматриваться как эффективная тепловая защита. Это обстоятельство также имеет важное значение при оценке методов весеннего разупрочнения ледяного покрова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубцов Н. А.* К решению однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачного материала // Теплофизика и Аэромеханика, 2005. Т. 12, №3. С. 471–482.
2. *Рубцов Н. А.* К определению граничных условий радиационного теплообмена на плоской поверхности раздела двух сред // Теплофизика и Аэромеханика, 2003. Т. 10, №1. С. 87–102.
3. *Рубцов Н. А., Тимофеев А. М., Саввинова Н. А.* Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003.
3. *Рубцов Н. А., Слепцов С. Д.* Анализ свойств теплового излучения осесимметричных полупрозрачных систем с проницаемыми границами // Теплофизика и Аэромеханика, 2008. Т. 15, №4. С. 711–719.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА МУФТОВОЙ СВАРКИ ПОЛИЭТИЛЕНОВЫХ ТРУБ С УЧЕТОМ ДВУХФАЗНОЙ ОБЛАСТИ

MODELING OF THERMAL PROCESS OF SOCKET WELDING OF POLYETHYLENE PIPES TAKING INTO ACCOUNT DIPHASIC AREA

Сивцева В. В.[1], Старостин Н. П.[2]

[1] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
v01s12@mail.ru

[2] *Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия*
nikstar56@mail.ru

Согласно нормативным документам, сварку полиэтиленовых труб можно проводить при температурах ОВ от - 15 до + 45 °С. Сварку при температурах ОВ ниже регламентируемых рекомендуется проводить в конструкциях обеспечивающих соблюдение данного режима. Однако такая сварка связана с большими энергетическими непроизводительными затратами и длительными подготовительными работами, что недопустимо в аварийных ситуациях. Таким образом, актуальной проблемой является разработка методов и средств оперативной сварки полиэтиленовых труб в зимних условиях в регионах с холодным климатом, где температуры окружающего воздуха (ОВ) достигают значений ниже минус 15 °С. При низких температурах ОВ технологические режимы, обеспечивающие такую же динамику температурного поля, что и при допустимых температурах ОВ, определяются на основе математического моделирования теплового процесса сварки.

Динамика температурного поля при муфтовой сварке теоретически изучена недостаточно. Теоретические результаты расчетов динамики температур хорошо совпадают с экспериментальными данными только на этапе нагрева, на этапе охлаждения достоверных сопоставлений теоретических и экспериментальных данных в литературе не приводится, что свидетельствует о недостаточной изученности процесса остывания при муфтовой сварке, при котором происходит формирование сварного соединения. Для учета теплоты фазового перехода обычно используют классическую постановку задачи Стефана. В этой постановке предполагается, что фазовый переход происходит на четко выраженной границе раздела твердой и жидкой фаз. В полиэтилене не существует такой четко выраженной границы, фазовый переход происходит в интервале температур.

Задача с фазовым переходом в спектре температур решалась методом конечных разностей по тому же алгоритму что и классическая задача Стефана. Теоретическая зависимость температуры от времени, полученная с помощью изложенного способа учета теплоты фазового перехода, с удовлетворительной для практического использования точностью описывает экспериментальную кривую. Такие же результаты получены и для других экспериментальных данных, что свидетельствует об адекватности предлагаемой математической модели реальному тепловому процессу при муфтовой сварке полиэтиленовых труб.

Таким образом, при моделировании теплового процесса сварки полиэтиленовых труб для газопроводов с помощью муфт с закладными нагревателями необходимо учитывать протекание фазового перехода в интервале температур.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF HEAT EXCHANGE IN CLIMATIC TESTING OF POLYMERIC MATERIALS

Старостин Н. П.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия
nikstar56@mail.ru

Представлены основные направления исследований лаборатории климатических испытаний Института проблем нефти и газа СО РАН,

в которых используются методы математического моделирования, в частности, прямые и обратные задачи теплообмена. Одним из таких направлений является разработка технологий стыковой и муфтовой сварки полиэтиленовых труб при низких температурах окружающего воздуха, при котором ключевым является математическое моделирование теплового процесса сварки. Приводится подход определения технологических режимов стыковой сварки при температурах воздуха ниже нормативных, заключающийся в следующем. Решением классической задачи Стефана определяется продолжительность нагрева, обеспечивающая допустимую глубину проплавления при сварке в условиях низких температур. Для формирования структуры материала, обеспечивающей необходимую прочность соединения, охлаждение стыка проводится в теплоизоляционной камере. В отличие от существующих работ по моделированию теплового процесса, на стадии охлаждения в данной работе учитывается образование грата и укорочение труб. Температура в камере определяется на основе теплового баланса.

При муфтовой сварке технологические режимы сварки также определяются математическим моделированием теплового процесса. При этом в отличие от стыковой сварки предлагается учитывать фазовый переход в диапазоне температур. Доля твердой фазы при этом определяется по термограммам, полученным с помощью дифференциального сканирующего калориметра. Приводятся перспективы исследований в данном направлении.

Для разработки рекомендаций по строительству полиэтиленовых газопроводов в зимних условиях Республики Саха (Якутия) предлагается простейшая математическая модель теплового процесса для расчета продолжительности подогрева труб в бухтах для их размотки. Рассматривается задача прогнозирования динамики температурного поля вечномерзлого грунта при воздействии подземного бесканального трубопровода теплоснабжения из сшитого полиэтилена, армированного нитью из арамидного волокна (кевлара), с тепловой изоляцией из пенополиуретана в полиэтиленовой оболочке.

Приводятся результаты численного моделирования теплового процесса при шлифовании алмаза на ограночном диске. Показана роль полировочного состава для обеспечения равномерности распределения температуры по зоне трения.

Приводится метод тепловой диагностики трения, основанный на решении граничной обратной задачи теплообмена и предназначенный для повышения информативности стендовых и эксплуатационных испытаний узлов трения машин и механизмов. Метод основан на фак-

те, что почти вся работа, затрачиваемая на трение, трансформируется в теплоту. Таким образом, в случаях, когда замер работы трения затруднен, ее можно определить по фрикционному тепловыделению, которое восстанавливается решением граничной обратной задачи. Показана эффективность метода итерационной регуляризации для тепловой диагностики трения для различных узлов трения - подшипников скольжения и шаровых опор. Приводятся упрощенные математические модели, используемые для тепловой диагностики трения.

ДВИЖЕНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОЙ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НАМАГНИЧЕННОГО ШАРА

MOTION OF A VISCOUS ISOTROPIC PLASMA IN THE FIELD OF A ROTATING MAGNETIZED SPHERE

Тимофеев В. Б.

Северо-Восточный федеральный университет (филиал)
Нерюнгри, Россия
nertiv@rambler.ru

Осесимметричные плазменные конфигурации в поле вращающегося намагниченного центрального тела исследовались приближенными аналитическими методами. Полученные в этих работах графики для скорости плазмы носят противоречивый характер. В связи с чем проведено последовательное численное решение самосогласованной краевой МГД задачи с целью исследования профиля скорости плазмы в окрестности вращающегося намагниченного шара. Рассматривались числа Гартмана от 1 до 18. Система моделирующих уравнений в безразмерных переменных при магнитной постановке задачи о вращении намагниченного шара в плазме в осесимметричном приближении имеет вид $\mathbf{V} = \mathbf{V}(0, 0, V_\varphi)$:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \frac{3}{tg\theta}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right) + \frac{Ha}{r^4}\left[\frac{1}{tg\theta}\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial B}{\partial\theta} + \frac{2}{3}\frac{B}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}\right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\partial B}{\partial\theta}\right) - \frac{B}{r^2(\sin\theta)^2} + \frac{Ha(\sin\theta)^2}{r^2}\left[\frac{1}{tg\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right] = 0,$$

где $\frac{B_p R}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ - число Гартмана, $B_p = \frac{m}{R^3}$ - магнитное поле шара на полюсе, R - радиус шара, η - динамическая вязкость, σ- изотропная проводимость плазмы, безразмерная угловая скорость ω и безразмерное индуцированное магнитное поле B.

Согласно результатам численных решений, магнитогидродинамические поправки к скорости плазмы имеют наибольшую величину для шара - идеального проводника. Поэтому, проявление МГД - эффектов при решении самосогласованной задачи, можно ожидать, прежде всего, для шара - идеального проводника. Соответствующие граничные условия на поверхности шара имеют вид: $\omega(r,\theta) = 1$, $\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B}{r} = 0$ при $r = 1$. Метод прямых позволяет свести решение краевой задачи для системы уравнений в частных производных к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\omega_i}{dr} = X_i, \frac{dB_i}{dr} = Y_i$$

$$\frac{dX_i}{dr} + \frac{4X_i}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{h^2} + \frac{3}{tg(ih)}\frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right) =$$

$$-\frac{Ha}{r^4}\left(\frac{1}{tg(ih)}\frac{dB_i}{dr} + \frac{1}{2r}\frac{B_{i+1} - B_{i-1}}{2h} + \frac{3}{2}\frac{B_i}{rtg(ih)}\right)$$

$$\frac{dY_i}{dr} + \frac{2Y_i}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{B_{i+1} - 2B_i + B_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{\mathrm{tg}(ih)}\frac{B_{i+1} - B_{i-1}}{2h}\right) - \frac{B_i}{r^2\sin^2\theta} =$$

$$-\frac{Ha\sin^2\theta}{r^2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}(ih)}\frac{d\omega_i}{dr} + \frac{1}{2r}\frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right),$$

где $h = \frac{\pi}{2n}$ - шаг сетки, n - число полос.

Задача решалась в области: $\theta = 0 \div \frac{\pi}{2}$ при $r = 1 \div 4$ в силу симметрии уравнений по угловой координате относительно экватора и полюса шара: $\omega_1 = \omega - 1$, $\omega_{n-1} = \omega_{n+1}$,$B_1 = B_{-1}$, $B_{n-1} = B_{n+1}$. Граничное условие на внешней границе области задается гидродинамическим значением угловой скорости ($\omega = 0.0156$) для безграничной области, значение индуцированного магнитного поля полагалось равным нулю (B = 0). При решении задачи Коши для числа Гартмана Ha=1 значения X_i, Y_i подбирались методом перебора в окрестности чисто гидродинамического решения, принимаемого в качестве нулевого приближения. Для повышения устойчивости алгоритма решение вдоль прямых строилось с внешней границы, когда коэффициенты в уравнениях малы и неустойчивости не успевают развиться при продвижении расчета к внутренней границе. Расчет осуществлялся методом Рунге - Кутта - Фальберга. В дальнейшем численное решение самосогласованной краевой задачи осуществлялось в порядке возрастания числа Гартмана с использованием метода перебора начальных данных в окрестности решений, полученных для предыдущих чисел Гартмана.

Полученные результаты численного расчета выявили существование эффекта сверх вращения в области значения числа Гартмана 18. Сравнение с эмпирическими данными исскуственных спутников Земли показывает хорошее численное совпадение параметров режима сверхвращения по широтам $0^0 - 25^0$, хорошее качественное описание по значениям скоростей и высот (Рис.1.).

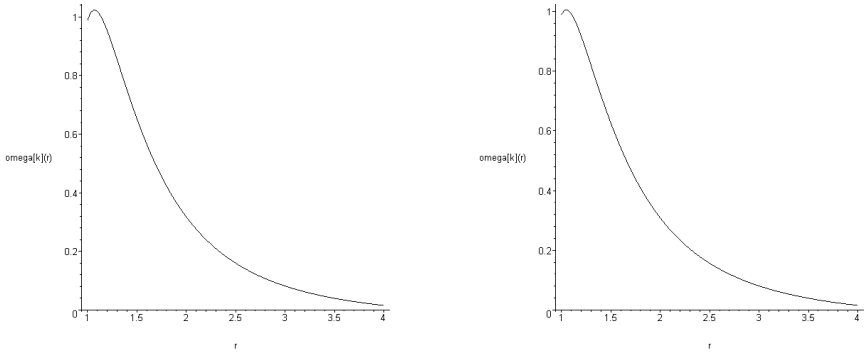


Рис. 1. Профиль скорости плазмы для шара - идеального проводника, Ha=18, полярный угол слева $\theta = 0°$, справа - 30°.

РАСЧЕТ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

CALCULATION OF POINT SOURCES OF HEAT IN A STATIONARY MODE FOR A RECTANGULAR REGION

Тихонов А. Г.

Якутский экономико-правовой институт, Якутск, Россия
tihonov49@inbox.ru

Для стационарной теплопроводности в прямоугольной области применительно к режиму термостатирования рассмотрена задача управления тепловыми источниками.

При этом выделены области, соответствующие самому объекту термостатирования, камере размещения объекта, корпусу с тепловыми источниками. Предполагается наличие идеального теплового контакта между термостатом, камерой и корпусом. Нужно определить мощность тепловых источников при заданной схеме их расположения, обеспечивающей номинальную температуру внутри объекта.

Сформулирована задача оптимизации, в которой в качестве управления принят вектор $\vec{V}$ (мощности локальных тепловых источников) с компонентами $V_i, i = 1, ..., M$. Функционал качества задается в виде выражения

$$\Phi(\varepsilon, V) = \int\limits_{\Omega_2} (u(x; v) - \varphi)dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{M} V_i^2,$$

где ε величина, используемая для ограничения величины тепловых источников тепла. Под решением понимается вектор $\vec{W}$: $\Phi(\varepsilon, W) = \min_V \Phi(\varepsilon, V)$.

Рассмотрен численный метод реализации сформулированной задачи оптимизации. Основной особенностью численной схемы является применение метода блочных итераций при решении соответствующей стационарной задачи теплопроводности. Проведены вычислительные эксперименты по моделированию термостатирования. Рассмотрено влияние величины параметра ε на вектор управления при различных условиях теплообмена (значениях числа Био).

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

NUMERICAL SOLUTION OF NONLOCAL PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION

Тихонова О. А.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
oa.tikhonova@gmail.com

Рассматривается параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + q(x)u + f(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \qquad (1)$$

с условиями:

$$u(0, t) = 0, \quad \alpha_1 u_{\xi_1} + \alpha_2 u_{\xi_2} = u(1, t), \quad 0 < t \le T \qquad (2)$$

где α_i - параметры; и начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{3}$$

Кроме того, выполнены следующие отношения:

$$k(x) \ge m_0 > 0, \quad q(x) \ge 0, \quad 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 \tag{4}$$

Введем равномерную сетку по времени $\omega_t = \{t = k\,i,\, k = 0, ..., n,$ $nt = T\}$ и перейдем к дифференциально-разностной задаче

$$\frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{\tau} = \frac{d}{du}\Big(k(x)\frac{du^{k+1}}{dx}\Big) + q(x, t^{k+1})u^{k+1} + f(x)$$

В результате имеем следующую задачу

$$(au_x)_x + Q(x)u = F(x), \tag{5}$$

где $Q(x) = q(x, t^{k+1}) - 1 \setminus \tau, \quad F(x) = -q(x) + u^k(x) \setminus \tau$ с условиями

$$u^{k+1}(0) = 0, \quad u^{k+1}(1) = u^{k+1}(\xi_1)\alpha_1 + u^{k+1}(\xi_2)\alpha_2$$

Таким образом, решение уравнения (1) с условиями (2)-(3) сводится к задаче Самарского-Бицадзе I рода для оператора Штурма-Лиувилля.

Решение этой задачи представляется в виде $u(x) = y(x) + u_{\xi_1} y_1(x) + u_{\xi_2} y_2(x)$, где функции $y(x), y_1(x)$ и $y_2(x)$ находится путем реализации вспомогательных подзадач:

$$(ky_x)_x + q(x)y = F(x), \quad y(0) = y(1) = 0;$$

$$(k(y_1)_x)_x + q(x)y_1 = 0, \quad y_1(0) = y_1(1) = \alpha_1;$$

$$(k(y_2)_x)_x + q(x)y_2 = 0, \quad y_2(0) = y_2(1) = \alpha_2;$$

После нахождения решений вспомогательных задач получаем систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} y(\xi_1) + u_{\xi_1} y_1(\xi_1) + u_{\xi_2} y_2(\xi_1) = u_{\xi_1}, \\ y(\xi_2) + u_{\xi_1} y_1(\xi_2) + u_{\xi_2} y_2(\xi_2) = u_{\xi_2}. \end{cases}$$

из нее получаем искомые параметры u_{ξ_1} и u_{ξ_2}

Выполнены численные эксперименты по проверке предложенного метода решения.

АДАПТАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕФТЕПРОВОДА В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

ONLINE ADAPTATION OF THE PIPELINE MATHEMATICAL MODEL

[1]Тмур А. Б., [2]Индиенко А. В.

ООО „Энергоавтоматика“, Москва, Россия
[1]anton.tmur@gmail, [2]comindeec52@yandex.ru

В наше время с развитием вычислительной техники стало возможным решение задач моделирования в режиме реального времени. Так, в рамках создания новой системы управления нефтепровода ВСТО (Восточная Сибирь - Тихий Океан) была внедрена математическая модель течения жидкости в трубопроводе, призванная осуществлять контроль перекачки посредством сравнения текущих параметров течения (давление и объемный расход в трубопроводе) с аналогичными параметрами, рассчитываемыми на модели.

Чтобы обеспечивать высокую точность моделирования процессов, происходящих в трубопроводе, параметры математической модели должны быть максимально приближены к параметрам объектов моделирования. На первом этапе можно провести идентификацию этих параметров на основании исторических данных о режимах работы нефтепровода. Однако характеристики объектов моделирования не постоянны и изменяются во времени. В связи с этим возникает задача адаптации параметров математической модели в реальном времени по фактически измеренным данным.

Математическая модель нефтепровода представляет собой череду активных и пассивных объектов. В качестве активных объектов нефтепровода выступают нефтеперекачивающие станции (НПС), на которых расположены насосы, создающие напор. Линейная часть нефтепровода представляет собой распределенные потери напора, а потому рассматривается, как пассивный объект. Потери напора на линейной части при стационарном процессе течения описываются следующим уравнением:

$$-\partial P/\partial x = \frac{\lambda \rho u^2}{2D} - \rho g \sin\alpha \qquad (1)$$

где P - давление, x - пространственная координата, измеряемая вдоль оси трубопровода, λ - коэффициент трения, ρ - плотность жидкости, u

- продольная скорость течения жидкости, D - диаметр трубопровода, α - угол наклона трубопровода.

В качестве параметра адаптации в данной работе используется эффективный диаметр участка трубопровода между двумя соседними НПС. Для адаптации эффективного диаметра используются показания датчиков давления, установленных в контрольных пунктах линейного участка трубопровода. Интегрируя уравнение (1) по координате от входа в трубопровод до конкретного датчика давления получаем совокупность невязок, минимизируя сумму квадратов которых получаем адаптированное значение диаметра. Моделирование НПС сводится к отдельному моделированию каждого насоса. Течение жидкости описывается следующим уравнением:

$$(P_{za} - P_{do})/\rho N^2 = a_0 + a_1 \frac{Q}{N} + a_2 \left(\frac{Q}{N}\right)^2 + a_3 \left(\frac{Q}{N}\right)^3, \qquad (2)$$

где P_{do}, P_{za} - соответственно давления до насоса и за насосом, Q - объемный расход через насос, N - частота вращения колеса насоса, a_0, a_1, a_2, a_3 - коэффициенты напорной характеристики насоса.

Именно напорная характеристика насоса подвержена изменениям в связи с эксплуатацией насоса. Адаптация напорной характеристики для каждого насоса производится путем варьирования специального коэффициента k в задаче минимизации следующей невязки:

$$(P_{za} - P_{do})/\rho N^2 = a_0 + a_1 \frac{Qk}{N} + a_2 \left(\frac{Qk}{N}\right)^2 + a_3 \left(\frac{Qk}{N}\right)^3. \qquad (3)$$

Такое равномерное изменение напорной характеристики ведет по сути к изменениям последних трех её коэффициентов. В работе приведены численные результаты адаптации математической модели на реальных данных нефтепровода ВСТО, а также некоторые идеи обобщения описанных методов для случая сложных разветвленных нефтепроводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гликман Б. Ф.* Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей - М.: Машиностроение, 1989.
2. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. - М.: Наука, 1991.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ПОДПОВЕРХНОСТНОЙ РАДИОЛОКАЦИИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ПЛАНАРНЫХ ЦЕПЕЙ

SOLUTION OF RADIOLOCATION SUBSURFACES DIRECT PROBLEM BY PLANAR NETWORKS MODIFIED METHODS

Федоров В. Н.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
fvnjgti@rambler.ru

Интерпретация результатов подповерхостной радиолокации (ПРЛ) и идентификация областей и объектов традиционно возлагаются на оператора, что снижает достоверность и оперативность мониторинга, сдерживает использования ПРЛ для решения широкого круга задач. Повышение достоверности диагностики, идентификации и оперативности возможно при использовании электродинамических моделей слоистых (квазислоистых) сред с локальными неоднородностями.

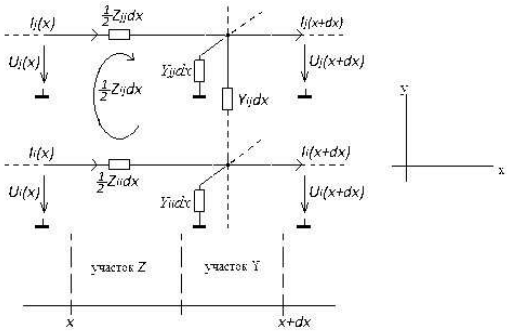


Рис. 1. Многополюстник, моделирующий участок dx дисперсионной среды с участками магнитной Z и электрической Y связями

Для построения электродинамической модели среды необходимо решить прямую задачу рассеяния. Для этого используются различные численные методы решения электродинамических задач. В настоящее время получил широкое распространение метод конечных разностей во временной области (Finite-Difference Time-Domain Method – FDTD), предложенный K. Yee [1]. Сейчас он является основным методом моделирования в ПРЛ. Этот метод основан на дискретизации уравнений Максвелла, записанных в дифференциальной пространственно-временной формулировке. Достоинством FDTD можно считать его универсальность и эффективность. Но стабильность схемы и сходимость метода сильно зависит от шага временной сетки, для

него сложно задавать граничные условия, а самое главное – он требует весьма значительных вычислительных ресурсов.

Для успешного использования FDTD целесообразно с помощью менее общих подходов получить сведения о качественной стороне и физических особенностях моделируемых процессов, на основе более простых моделей слоистых (квазислоистых) сред с локальными неоднородностями.

Рассматривается электродинамическая модель многослойной среды на основе теории многополюстников и реализована одномерная модель четырехслойной среды, над- и подстилающей поверхностей в виде каскадного соединения шести четырехполюстников, каждая из которых характеризовался своей мощностью (протяженностью) l_i, комплексной постоянной распространения γ_i, комплексным волновым сопротивлением z_i. С помощью этой модели удалось подтвердить эффект накопления электрического заряда на границе двух сред и определить условия его возникновения [2]. Эта модель не чувствительна к временному шагу, т.к. в ней временная зависимость заменена на частотную через преобразование Фурье. Использование явной схемы прямого счета обеспечил очень быструю сходимость и устойчивость процедуры.

В дальнейшем, на основе метода модифицированных планарных цепей, для учета локальных неоднородностей и наклонных границ, разработана двухмерная модель в виде каскадного соединения M эквивалентных N-многополюстников, у которых электрические Y и магнитные связи Z сдвинуты на полшага дискретизации (см. Рис. 1). В направлении X длина многополюстника равна шагу дискретизации dx, а в направлении Y – мощности (ширине) L_y среды в направлении Y, dy=L_y/N. В направлении Z среда бесконечна и не обладает особенностями. Передаточная функция N-многополюстника [a]=[Z]*[Y], где [Z] – ленточная матрица магнитных связей, [Y] – ленточная матрица электрических связей. Это позволило учесть дисперсию, поляризацию и релаксационные потери в каждой компоненте многослойной дисперсионной среды с локальными неоднородностями и наклонными границами. Схема прямого счета обеспечила очень быструю сходимость и устойчивость процедуры.

Из-за не значительных требований к вычислительным ресурсам модель была реализована в среде Mathcad-10. Это позволяет использовать ее операторами в полевых условиях для интерпретация результатов подповерхостной радиолокации

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yee K. S.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media // IEEE Trans. Antennas Propagat, 1966. V. 14, №5. P. 302–307.
2. *Федоров В. Н.* Электродинамическая модель вечномерзлых горных пород // III Международный симпозиум «Горное дело в Арктике». Санкт–Петербург, 1994. С. 131.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В КАЛОРИМЕТРАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE HIGHT ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

Шарков А. В., Кораблев В. А., Некрасов А. С., Кузьмин М. Д.

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
Санкт-Петербург, Россия

Для измерения теплопроводности конструкционных и строительных материалов используются калориметры, при проектировании которых делается ряд допущений, например об изотермичности ядра измерительной ячейки или стационарности процесса переноса теплоты.

При проведении измерений теплопроводности возникает методическая погрешность связанная с тем, что измеренная скорость нагрева или остывания ядра калориметра в месте установки датчика температуры отличается от среднеобъемной. Для минимизации этой погрешности исследовалось решение уравнения теплопроводности для плоской стенки при граничных условиях третьего рода, и определялось геометрическое место точек, в которых скорость изменения температуры была максимально близка к среднеобъемной скорости нагрева или остывания, а также определялись периоды времени, когда погрешность измерений была минимальной.

В настоящее время для измерения теплопроводности строительных и конструкционных материалов наиболее точными и распространенными являются стационарные методы. Однако существенным их недостатком является большая длительность процесса измерения. С целью

сокращения времени измерений исследовалось решение нестационарного уравнения теплопроводности для плоской стенки при граничных условиях первого рода. При этом определялась зависимость тепловых потоков на границах образца от времени, и на основе этой информации прогнозировалось значение теплового потока, проходящего через образец. Использование результатов этого решения для определения теплового сопротивления позволяет существенно (в несколько раз) сократить время измерений без значительного увеличения погрешности. Это особенно важно при проведении натурных измерений теплопроводности ограждающих конструкций зданий и сооружений, где время измерений доходит до 15 суток.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОНКУРЕНЦИИ ТРЕХ ПОПУЛЯЦИЙ

STUDY OF THREE POPULATIONS CONCURRENCE MATHEMATICAL MODELS

Шестакова Т. П.

Якутский государственный инженерно-технический институт, Якутск, Россия

Shestak80@mail.ru

В данной работе проводится исследование 6 математических моделей конкуренции трех видов, объясняющих сосуществование различных популяций в природе. За основу исследования взято уравнение Лотки-Вольтерра:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \frac{r_i}{k_i} \left(k_i - \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j \right), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где r_i - удельная скорость роста, k_i - емкость среды i – того вида при отсутствии конкурента (i=1,2,3), α_{ij}- положительные безразмерные коэффициенты служат мерой относительного влияния видов друг на друга.

Путем проведения некоторых преобразований и ввода новых параметров в системе уравнений (1), приходим к более простым математическим моделям вида (2) конкуренции трех популяций, зависящей от трех параметров

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_1(1 - y_1 - by_2 - ay_3) \\ \dot{y_2} = y_2(1 - ay_1 - y_2 - by_3) \\ \dot{y_3} = y_3(r - ay_1 - by_2 - y_3). \end{cases} \quad (2)$$

Задачей работы является, во-первых, выяснить при каких параметрах существует состояние равновесия с положительными координатами, и найти условия устойчивого сосуществования этих трех видов; во-вторых, провести исследование численных методов и построение алгоритмов численного решения моделей, с учетом полученных условий асимптотической устойчивости и неустойчивости состояния равновесия; в третьих основываясь на результаты графического анализа поведения численных решений определить вымирание одного или более видов или сосуществование всех трех видов.

В результате исследования 6 математических моделей было получено 15 теорем обеспечивающих асимптотическую устойчивость и неустойчивость состояния равновесия исследуемых моделей.

Биологический смысл данного исследования состоит в том, что при асимптотической устойчивости состояния равновесия все виды сосуществуют, а при неустойчивости состояния равновесия один или более видов идут на вымирание.

Были рассмотрены три численных метода решения поставленной задачи, проведено исследование устойчивости и погрешности предлагаемых вычислительных схем, наиболее точным из рассмотренных методов был признан метод Рунге-Кутта 4 порядка. Численные решения исследуемых моделей изображается в виде графика, описывающего динамику развития трехвидового сообщества в зависимости от времени, а также как фазовые траектории на трех плоскостях и интегральной кривой в трехмерном пространстве. С помощью графического анализа численных решений, можно выяснить какой именно конкретный вид или виды идут на вымирание или происходит сосуществование популяций, что было затруднительно определить в теоретической части исследования.

Результаты данной работы могут быть использованы для облегчения работы экологам и биологам, при создании заповедников, резерватов (где наблюдается конкуренция трех популяций), а также для проведения исследований математических моделей конкуренции более трех популяций.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ НАНОЧАСТИЦ

COMPUTER MODELING OF HYBRID NANOPARTICLES

Юрьев Г. С.[1], Бескрованов В. В.[2], Долматов В. У.[3]

[1] *Институт неорганической химии имени А.В. Николаева СО РАН, Новосибирск, Россия*
yurjev@mail.ru.

[2] *Северо-Восточный федеральный университет Якутск, Россия*
bescrovanov@mail.ru.

[3] *ФГУП Специальное конструкторско-технологическое бюро «Технолог», Санкт-Петербург, Россия*
DiamondCentre@mail.ru.

Теоретический расчет рентгеновской дифракционной картины (XRD) подтвердил экспериментальную картину XRD. При моделировании параметры элементарной ячейки вещества (a, b, c, α, β, γ) и пространственная группа симметрии транслируется в 3D пространстве величиной шагов по осям Δx, Δy, Δz и рассчитываются координаты атомов в наночастице. Это служит основой для расчета распределения атомов в наночастице с учетом радиусов атомов по координационным сферам (КС) относительно центрального атома. Каждая КС характеризуется радиусом (R) и координационным числом (КЧ). Для сферической наночастицы размер соответствует радиусу последней КС, для несферической - протяженности в пространстве, ограниченном шагами трансляции. Если частица - оболочка, она ограничена внутренней и внешней КС. Компьютерное построение частиц можно использовать в качестве строительных блоков для сложных гибридных наночастиц.

Используя координаты атомов и размер частицы можно рассчитать ее характеристику, например, картину t-XRD (в теории Дебая она связывает картину дифракции с межатомными расстояниями). Расчет картин t-XRD позволяет связать набор межатомных расстояний в наночастице с положениями отражений, формой и интенсивностью. Используются значения рассеивающей способности атомов.

Структура наночастиц выявлялась сравнением положения и интенсивности отражений, формы их контуров в экспериментальной e-XRD и t-XRD картинах. Если положения отражений на картинах не соответствуют друг другу, то выполнялся дальнейший расчет до достижения этого соответствия. При последующих расчетах проводилась корректировка (увеличения или уменьшения) параметра решетки t-XRD, что

приводит к изменению межатомных расстояний в частице. Завышенная интенсивность на картинах экспериментального отражения указывает на текстуру в изучаемых наночастицах. Это требует при расчете последующих распределений атомов и картин t-XRD увеличения числа шагов трансляции элементарной ячейки по соответствующему кристаллографическому направлению. Это дает возможность управления процессом моделирования.

Распределение атомов в нанокристаллах в зависимости от величины уменьшения (или увеличения) параметров решетки дает информацию не только о межатомных расстояниях, но и об изменении КЧ, которое указывает на изменение структуры. Это было показано на примере определения структуры детонационных наноалмазов при сравнении их структуры с структурой натурального алмаза. В этих случаях КС и их КЧ равны аналогичным значениям для натурального алмаза только до определенной КС, после которой КС и КЧ отличаются от таковых натурального алмаза. Это дает возможность представить структуру наноалмаза, состоящей из остова и оболочки, причем структуры остова и оболочки имеют алмазную и неалмазную структуру, соответственно. В оболочке, например, структура рыхлая при параметрах решетки, увеличенных по сравнению с параметрами решетки натурального алмаза. Картина XRD зависит от размера наночастиц. С увеличением (или уменьшением) размера наночастиц связано увеличение (или уменьшение) числа и размера межатомных расстояний, что, в свою очередь, вызывает сдвиг отражений в сторону малых (или больших) дифракционных углов в картине XRD. Предложенная методика сравнения e-XRD и t-XRD картин для определения КЧ и размера открывает возможность определения качества наноалмазов, синтезированных различными производителями. Некачественные наноалмазы имеют остов и оболочку.

Выполнено компьютерное моделирование сложных гибридных наночастиц, состоящих из остова и оболочки (остов@оболочка). Конструирование наночастиц с неорганическим остовом и органической оболочкой позволяет приблизиться к строению природной материи. Разработанная оригинальная методика позволяет использовать компьютерное конструирование для построения модельных 3D строительных единиц при моделировании более сложных гибридных наночастиц: алмаз@фуллерен, алмаз@SWNT, алмаз@H, $H_{152}@SWNT@H_{447}$. Строительные единицы служат не только остовами, имеющими несферическую, сферическую или цилиндрическую форму, но и оболочками. Эволюционная компьютерная нанотехнология позволяет создавать все более сложные модели наночастиц. Например, с последую-

щими оболочками алмаз@графит@фуллерен, структуры типа peapod и др. или с неорганическим остовом и органической оболочкой алмаз@биомолекулы. Остов и оболочка объединяются аддитивным сложением. Интерфейс частицы образуется объединением атомов внешней КС остова и атомов внутренней КС оболочки. Расстояния между атомами могут соответствовать как химическим, так и вандерваальсовым взаимодействиям. Рассчитанные картины t-XRD для гибридных наночастиц позволяют предсказать ожидаемую картину e-XRD и оценить в ней характер, величину разрешения между отражениями. Это предсказывает необходимую схему регистрации картин e-XRD и оборудование. Необходимо использовать интенсивное и монохроматизированное ($\Delta\lambda/\lambda = 4 * 10^{-4}$) синхротронное излучение ускорителя (ВЭППЗ, ИЯФ СО РАН, Новосибирск), позволяющее в схеме θ-2θ дифрактометра установить монохроматоры в падающем и дифрагируемом пучках излучения. В последнем устраняется некогерентное рассеяние в случае присутствия легких атомов.

Инновационным является оригинальное компьютерное моделирование наночастиц и строительных блоков для сборки гибридных наночастиц. Осуществлены возможность управления процессом определения структуры наночастиц, предсказания корректной регистрации картин XRD наночастиц на имеющемся дифрактометрическом оборудовании до реального синтеза наночастиц и создан метод определения качества наночастиц.

Секция IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ON A NON-OVERLAPPING DOMAIN DECOMPOSITION APPROACH AND ITS APPLICATIONS

Utyuzhnikov S. V.

University of Manchester, Manchester, United Kingdom
s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk

A non-overlapping domain decomposition approach is developed by using the Calderón - Ryabenḱii (CR) surface potentials [1, 2]. A key property of the CR potentials is that they are projections. A brief introduction to the CR potentials is given in application to linear and nonlinear boundary value problems (BVPs).

In particular, the approach allows us to transfer the boundary conditions from a real boundary to an interface one. This can be realised either exactly (for linear BVPs) or approximately (for nonlinear BVPs). The boundary conditions at the interface boundary are nonlocal and can be formulated via a pseudo-differential equation. The transfer of the boundary conditions is beneficial for practical applications in the real-life design. For example, it is often required to run serial computations while some input parameters, such as boundary conditions or the support of right-hand side, are varied to find out their optimal values.

Two applications of the approach are discussed: interface boundary conditions for near-wall turbulence modelling [3, 4], and the problem of active sound control and noise shielding [5-8]. For near wall turbulence modeling the original computational domain is split into a near wall (inner) subdomain and an outer subdomain. The influence of the inner problem can be represented by a pseudo-differential equation formulated at the intermediate boundary. In a ID case, it leads to the wall functions represented by Robin boundary conditions, which can be determined either analytically or numerically. The boundary conditions on the intermediate boundary, represented by a pseudo-differential equation, are nonlocal. The developed nonlocal interface boundary conditions capture main ow features along the wall such as high longitudinal derivatives caused by either source terms or the curvature of the wall.

In the problem of active noise shielding, a domain is protected from the effect of the field (noise) generated in another domain. That is realized via the implementation of additional (secondary) sources in such a way that the total contribution of all sources leads to the wanted effect. Along with the unwanted (noise) sources situated outside the domain to be shielded, the existence of internal (wanted) sources is accepted. The contribution of the secondary sources leads to noise attenuation while the wanted sound component retaining unaffected. Both a theoretical solution to the problem and its experimental realization are discussed.

REFERENCES

1. *Ryaben'kii V. S.* Method of Difference Potentials and Its Applications. Springer-Verlag, 2002.
2. *Utyuzhnikov S.V.* Generalized Calderon-Ryaben'kii Potentials // IMA J. of Applied Mathematics, 2009. V. 74, №1. P. 128–148.
3. *Utyuzhnikov S.V.* Domain decomposition for near-wall turbulent flows // Int. J. Computers & Fluids, 2009. V. 38, №9. P. 1710–1717.
4. *Utyuzhnikov S.V.* Robin-type wall functions and their numerical implementation // J. Applied Numerical Mathematics, 2008. V. 58, №10. P. 1521–1533.
5. *Lim H., Utyuzhnikov S.V., Lam Y.W., Turan, A.* Multi-domain active sound control and noise shielding // JASA, 2011, (in press).
6. *Utyuzhnikov S.V.* Nonlinear Problem of Active Sound Control // J. of Computational and Applied Mathematics, 2010. V. 234, №1. P. 215–223.
7. *Utyuzhnikov S.V.* Non-stationary problem of active sound control in bounded domains // J. of Computational and Applied Mathematics, 2010. V. 234, №6. P. 1725–1731
8. *Lim H., Utyuzhnikov S.V., Lam Y.W., Turan A., Avis M. R., Ryaben'kii V. S., Tsynkov S.V.* An experimental validation of the active noise control methodology based on difference potentials // AIAA J, 2009. V. 47, №4. P. 874–884.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ[1]

NUMERICAL ANALYSIS OF EXTREMUM PROBLEMS FOR HEAT CONVECTION EQUATIONS

Алексеев Г. В., Терешко Д. А.

Институт прикладной математики ДВО РАН
Владивосток, Россия
alekseev@iam.dvo.ru

В работе рассматриваются задачи граничного управления для математической модели переноса тепла в вязкой жидкости в рамках приближения Обербека-Буссинеска. Указанные задачи формулируются как задачи условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной начально-краевой задачи, так и управлений. Роль последних играют неизвестные значения вектора скорости и потока тепла на определенных участках границы области течения. На основе методов работ [1-3] выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия минимума.

Разрабатывается алгоритм численного решения задачи граничного управления, основанный на методе Ньютона решения нелинейной системы оптимальности. Для дискретизации краевых задач используется метод конечных элементов. При проведении вычислительных экспериментов исследуется эффективность воздействия температурных и скоростных управлений на течения жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
2. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М: Научный мир, 2010.
3. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Экстремальные задачи граничного управления для стационарной модели тепловой конвекции // Докл. АН. 2010. Т. 430, № 2. С. 173–178.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 10-01-00219-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-А-03-07).

ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НАСЫЩЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ[1]

RESEARCH OF APPROXIMATION SCHEMES FOR THE EQUATION OF SATURATION IN THE PROBLEMS OF TWO-PHASE FILTRATION

Афанасьева Н. М.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
af_nadya@mail.ru

Математическое моделирование течений многофазной жидкости в пористых средах имеет важное прикладное значение при добыче нефти и газа. Система уравнений включает себя уравнения неразрывности, выражающее закон сохранения массы каждой из фаз. Уравнения движения записываются в виде закона Дарси, который связывает скорость с давлением. Замыкание системы уравнений проводится на основе постоянства суммы всех насыщенностей [1], [2]. Математические модели процессов массопереноса в пористых средах являются существенно нелинейными и трудными для исследования.

В данной работе рассматривается математическая модель двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в пористой среде. Начально-краевая задача состоит из двух уравнений для определения полей давления и насыщенности. Уравнение для давления представляет собой эллиптическое уравнение, уравнение насыщенности – параболическое в случае учета капиллярных сил, и гиперболическое без учета капиллярных сил. Работа посвящена исследованию схем аппроксимации дифференциального уравнения для насыщенности. При учете капиллярных сил, разностная схема должна хорошо описывать два, по существу, различных физических процесса, т.е. должна строиться с разделением конвективного и диффузионного переносов [3], [4]. Это дает возможность отбора и использования на каждом этапе физического процесса оптимальных для данного этапа разностных схем, тем самым уменьшить общие вычислительные расходы.

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 г.г. (гос.контракт № 02.740.11.0041).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
2. *Chen Z., Huan G., Ma Y.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
3. *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.
4. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. Москва: Книжный дом "Либроком" , 2009.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧАХ ДОБЫЧИ ПРИРОДНОГО ГАЗА

COMPUTING EXPERIMENT IN THE PROBLEMS OF THE NATURAL GAS MINING

Бондарев Э. А., Рожин И. И., Аргунова К. К.

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия

bondarev@ipng.ysn.ru

В вычислительном эксперименте исследовано влияние параметров математической модели на динамику полей давления и температуры при неизотермической фильтрации несовершенного газа. Для математического описания процесса использовалась нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, полученная из законов сохранения массы и энергии и закона Дарси, а в качестве замыкающих соотношений - физическое и калорическое уравнения состояния. Граничные условия соответствуют отбору газа при заданном давлении на забое скважины. На контуре питания задаются условия, моделирующие отсутствия потоков фильтрующегося газа и тепла, то есть моделируется водонапорный режим отбора газа. В начальный момент времени давление и температура считаются постоянными. В качестве уравнения состояния принимается уравнение Латонова - Гуревича. Показано, что влияние неизотермичности процесса на такие интегральные характеристики, как суммарная добыча, наиболее существенно при умеренных темпах отбора. На примере Средне-Вилюйского месторождения Якутии и Мессояхского месторождения Красноярского края определена возможность образования гидратов в газоносном пласте путем сопоставления температурного поля в призабойной зоне скважины с равновесными условиями гидратообразования.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕНИЯ ПОРОШКОВЫХ ПОКРЫТИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ТЕХНОЛОГИЯМИ

STATISTICAL MODELING OF THE SURFACE PROFILE OF THE FRICTION OF POWDER COATINGS OBTAINED BY HIGH-TECHNOLOGY

Винокуров Г. Г.[1], **Попов О. Н.**[2]

[1] *Институт физико-технических проблем Севера имени В.П. Ларионова СО РАН, Якутск, Россия*
g.g.vinokurov@iptpn.ysn.ru.

[2] *Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия*
ponpon1@mail.ru.

Экспериментальное исследование формирования и разрушения макроструктуры порошковых покрытий крайне затруднено большим количеством частиц, высокими скоростями протекания и сложностью многочисленных физико-механических, теплофизических и др. процессов, что приводит к необходимости привлечения методов математического моделирования. При высокоэнергетических технологиях нанесения покрытий частицы порошкового материала движутся в высокотемпературной газовой среде; в результате взаимодействия их поверхности с кислородом образуется оксидная пленка [1].Оксидные пленки, обладая большей хрупкостью и твердостью, снижают прочность порошкового покрытия [2] и существенно влияют на процесс его изнашивания. В результате разрушение покрытия происходит, в основном, по границам слоёв и частиц. Этим обусловлена перспективность применения статистических моделей на основе вероятностно-геометрических систем случайных упаковок частиц.

В работе рассматривается фрикционное изнашивание сечения порошкового покрытия перпендикулярного пути трения, макроструктура которого описывается модельной матрицей, ячейки которой заполнены частицами порошкового материала.

Каждой частице поверхности приписывается статистический вес вида

$$\nu = (n_n + n_n + n_\partial)^\beta,$$

где $n_n,\ n_n,\ n_\partial$ – соответственно поперечные, продольные, диагональные координационные числа.

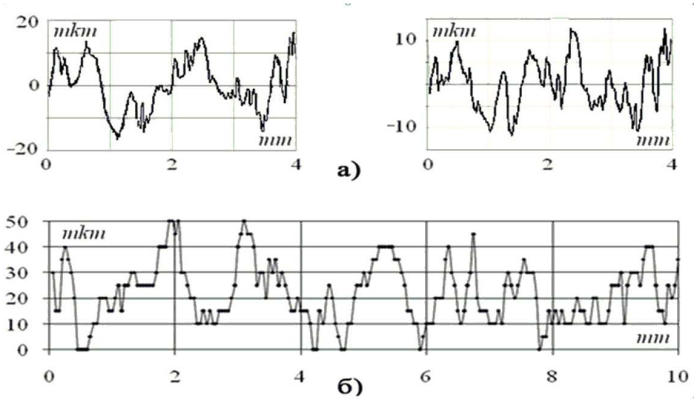


Рис. 1. Экспериментальные (а) и модельные (б) профилограммы поверхности трения порошкового покрытия; путь трения 1323 метра.

Удаление частиц в процессе изнашивания происходит с вероятностью обратно пропорциональной её весу. Параметр модели β определяется сопоставлением расчётных и экспериментальных характеристик износа; параметр учитывает совокупное влияние случайных факторов на формирование микрогеометрии поверхности трения.

Анализ профилограмм поверхности трения покрытий показывает, что на характерный вид поперечного профиля существенно влияет корреляция глубин близлежащих выемок. Следовательно, для получения модельных профилограмм требуется наиболее полным образом учесть вид автокорреляционной функции, показывающую тесноту связи между двумя сечениями профиля [3]. Поэтому определение параметра β проводилось аппроксимацией экспериментальной автокорреляционной функции. На рис. **а, б** приведены фрагменты экспериментальной и модельной профилограмм при значении β=1,6; наблюдается качественное сходство профилей.

Выводы.

1. Для описания изнашивания поверхности трения порошковых покрытий разработана статистическая модель на основе двумерной вероятностно-геометрической системы случайной упаковки частиц. Установлено, что для описания поперечного профиля требуется учёт корреляционных характеристик микрогеометрии поверхности.

2. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными профиля поверхности трения электрометаллизационных покрытий

из порошковых проволок, установлено их удовлетворительное согласие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасуи А., Моригаки О.* Наплавка и напыление. М.:Машиностроение, 1985.
2. *Максимович Г. Г., Шатинский В. Ф., Копылов В. И.* Физико-химические процессы при плазменном напылении и разрушение материалов с покрытиями.Киев.: Наукова думка, 1983.
3. *Винокуров Г. Г., Попов О. Н.* Исследование корреляционных характеристик микрогеометрии поверхности трения износостойких порошковых покрытий // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2009. Т. 11, №5(2) С. 263–265.

К УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

ON STABILITY OF STEADY-STATE PLANE-PARALLEL SHEARING FLOWS IN A STRATIFIED IN DENSITY IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID IN FIELD OF GRAVITY FORCE IN BOUSSINESQ APPROXIMATION

Гаврильева А. А.

Институт физико-технических проблем Севера имени В.П. Ларионова СО РАН, Якутск, Россия
gav-ann@yandex.ru

Проблема устойчивости сдвиговых течений стратифицированной жидкости играет важную роль при исследовании различных задач гидродинамики, физики атмосферы, океанологии и других родственных областей науки. К сожалению, она до сих пор не имеет удовлетворительного решения ввиду большой сложности определяющих уравнений. Более того, данная проблема связана с фундаментальной научной проблемой потери устойчивости ламинарного движения жидкости и его перехода к турбулентному состоянию. Первые работы по изучению этой проблемы путем анализа интегральных соотношений были выполнены около ста лет назад. Для рассматриваемых течений Майлс сформулировал достаточное условие устойчивости [1].

Исследуется задача линейной устойчивости установившихся плоскопараллельных сдвиговых течений непрерывно стратифицированной невязкой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными непро-

ницаемыми твердыми параллельными бесконечными пластинами, находящейся в поле силы тяжести, в приближении Буссинеска. В данной работе с помощью новой аналитической методики [2] установлена абсолютная неустойчивость изучаемых установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений стратифицированной жидкости относительно малых плоских возмущений. А именно, построены априорные оценки снизу, которые свидетельствуют об экспоненциальном во времени нарастании рассматриваемых возмущений, и приведен наглядный аналитический пример как установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений, так и наложенных на них малых плоских возмущений, растущих со временем согласно одной из сконструированных оценок снизу. Таким образом, показано, что достаточные условия устойчивости Майлса рассматриваемых течений, которые получены им методом интегральных соотношений, широко используемым в линейной теории гидродинамической устойчивости, являются одновременно и необходимыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miles J. W.* On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech, 1961. V. 10. №4. P. 496–508.
2. *Gubarev Yu. G.* The development of Lyapunov's direct method in the application to new types of problems of hydrodynamic stability theory // In: Progress in nonlinear analysis research / Ed. Erik T. Hoffmann. Chapter 7. New York: Nova science publishers, inc., 2009. P. 137–181 (ISBN 978-1-60456-359-7).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО И ЖИДКОГО ЯДЕР ЗЕМЛИ, ВЫЗВАННЫХ ПРИЛИВНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ[1]

MATHEMATICAL MODELLING OF THE EARTH'S INNER AND LIQUID CORES MOVEMENTS CAUSED BY TIDAL DEFORMATIONS

Григорьев Ю. М.[1], Скрябина О. Е.[2], Мохначевский А. Н.[3]

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]grigyum@yandex.ru, [2]dolya1232@mail.ru,
[3]mokhnachevskiy@mail.ru

Есть три подхода к изучению проблем динамики внутренних масс

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-00301).

Земли. Первое - обработка сейсмических данных. Именно этим подходом получены данные, которые проинтерпретированы как результат дифференциального вращения внутреннего твердого ядра Земли [1]. Второй подход - лабораторное моделирование [2]. В этом направлении получены экспериментальные данные по движению внутренних масс Земли. В частности, показано, что в зависимости от параметров материала модели и области, возможен как западный (скорость вращения ядра немного меньше скорости вращения Земли), так и восточный дрейф ядра Земли (скорость ядра немного больше скорости Земли). Такое лабораторное моделирование позволяет получать только качественные результаты. И наконец, третий подход - метод математического моделирования [3, 4 и др.]. Такой подход может дать какие то количественные результаты по данной проблематике. Для получения полной картины ситуации представляется необходимым учитывать результаты всех трех методов, как взаимодополняющих друг друга. Из первых опубликованных данных следует, что за год внутреннее ядро Земли поворачивается относительно поверхности на 0,3-0,5 градуса дуги, но в последних работах наблюдается тенденция уменьшения этой величины. В настоящее время эту величину считают порядка долей минут в год. В данном докладе излагаются результаты, полученные методом математического моделирования, которые позволяют делать вывод о наличии вклада приливного деформирования Земли на величину дифференциального вращения внутреннего ядра Земли. Разработана плоская математическая модель приливных деформаций жидкого и твердого ядер Земли. Получено приближенное решение задачи двумерной модели методом малого параметра. Получен эффект дифференциального вращения внутреннего ядра с восточным дрейфом. При этом получена явная формула, связывающая угловые скорости вращения ядра и Земли в первом порядке приближения. По этой формуле для относительной угловой скорости внутреннего ядра получено значение 0,39 мин. в год. Визуализированы линии тока течения жидкого ядра, вызванные приливными деформациями. Разработана трехмерная математическая модель приливных деформаций жидкого и твердого ядер Земли. Деформированное приливными силами (лунные приливы) жидкое ядро моделируется эллипсоидом вращения с малым эксцентриситетом, наполненным вязкой несжимаемой жидкостью, которую описываем в приближении Стокса. Внутреннее твердое ядро моделируется шаровой полостью в центре этого эллипсоида, на границе жидкого и твердого ядер ставим условия прилипания. Разработан метод малого параметра для приближенного решения задачи о нахождении поля

скоростей внутри такого двусвязного трехмерного тела. Для решения таких задач разработан метод собственных векторных функций, отличный от известного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Song X.* // Nature, 1996. V. 382. P. 221–224.
2. *Ревуженко А. Ф., Бобряков А. П., Косых В. П.* // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1997. №3. С. 37–42.
3. *Вильке В. Г.* // Прикладная математика и механика, 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 617–630.
4. *Григорьев Ю. М., Скрябина О. Е.* // Вестник СибГАУ, 2008. №4(21). С. 68–72.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА И ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФАКТОРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ[1]

CALCULATION AND OPTIMIZATION METHODS OF THE PIPELINE TRANSPORT SYSTEMS STRUCTURE UNDER INFLUENCE OF THE ENVIRONMENTAL EXTREME FACTORS

Гусев Е. Л.

Научно-исследовательский институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия
elgusev@mail.ru

В последние годы значительное внимание уделяется проблемам повышения прочности, надежности, ресурса, интенсификации систем трубопроводного транспорта [1,2]. Современные подходы к решению данных проблем связаны с математическим и компьютерным моделированием процессов функционирования трубопроводных систем [3,4]. Разработка адекватных математических моделей функционирования трубопроводного транспорта является основой для разработки эффективных методов численного расчета и оптимизации режимов трубопроводного транспорта и принятия на их основе оптимальных решений [5]. В условиях значительного перепада экстремальных температур необходимо также учитывать зависимость основных параметров транспор-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ - гранты № 07-01-00634, № 09-08-98501, №10-08-01301-а.

тируемых сред от температуры, а также влияние такой зависимости на режимы транспортировки.

В последние десятилетия, в связи с разработкой новых композиционных материалов с широким разнообразием физико-механических и химических свойств возникает проблема разработки физической и геометрической структуры трубопроводной системы, обеспечивающей наиболее эффективный режим транспорта в условиях экстремальных факторов внешней среды [6].

Конструкция стенок трубопроводов проектируется согласно полю действующих нагрузок и, как правило, является многослойной. При этом показано, что физическая и геометрическая структура слоисто-неоднородных трубопроводных систем оказывает существенное влияние на режимы транспортировки. Разработка многослойных покрытий из композиционных материалов позволяет создавать композиции, одновременно сочетающие высокие химические и механические свойства, не достижимые для однослойных покрытий. Направленный выбор физической и геометрической структуры покрытий из композиционных материалов позволяет достичь существенного синергетического эффекта в улучшении свойств слоисто-неоднородных покрытий по сравнению с однослойными. Увеличение числа слоев покрытия может позволить существенно улучшить его физико-механические свойства, а также разрабатывать композиционные покрытия, в которых отсутствуют характерные недостатки покрытий, имеющих меньшее число слоев.

В соответствии с этим, возникает важная проблема направленного выбора физической и геометрической структуры как самой трубопроводной системы, так и физической и геометрической структуры внешних и внутренних композиционных покрытий, обеспечивающей наиболее эффективный режим функционирования трубопроводных систем в условиях неблагоприятных сочетаний экстремальных факторов внешней среды [6].

Проведено математическое моделирование процессов функционирования трубопроводного транспорта в рамках сформулированной вариационной постановки, к которой могут быть сведены задачи оптимального проектирования физической и геометрической структуры трубопроводной системы при воздействии экстремальных факторов внешней среды. В качестве математической модели функционирования трубопроводной системы в условиях экстремальных факторов внешней среды, в рассматриваемой вариационной постановке, принята система уравнений неразрывности, состояния, сохранения энергии и импульса. Теплообмен транспортируемой по трубопроводной системе среды с

окружающей внешней средой считается происходящим по закону Ньютона [5, 7].

Вариационная постановка связана с проблемой направленного выбора физической и геометрической структуры как самой трубопроводной системы, так и физической и геометрической структуры внешних и внутренних композиционных покрытий, обеспечивающей наиболее эффективный режим функционирования трубопроводной системы в условиях неблагоприятных сочетаний экстремальных факторов внешней среды. Вводимая система критериев качества $R_0, R_1, ..., R_k$ формулирует комплекс требований, обеспечивающих наиболее эффективный режим функционирования трубопроводной системы в условиях экстремальных факторов внешней среды.

На основе математического и компьютерного моделирования проведено исследование функционирования трубопроводных систем при воздействии экстремальных факторов внешней среды. Проведено исследование влияния зависимости основных параметров транспортируемой среды от температуры на режимы функционирования трубопроводных систем. На основе математических моделей функционирования трубопроводных систем в условиях экстремально низких температур внешней среды проведены вычислительные эксперименты при различных значениях параметров, описывающих трубопроводную систему. На основе проведенных вычислительных экспериментов установлены закономерности зависимости оптимальной структуры трубопроводной системы от определяющих параметров.

Разработанные вариационные постановки многокритериальных задач оптимизации трубопроводного транспорта, методы их решения позволяют осуществлять эффективное управление режимами функционирования трубопроводного транспорта на основе оптимального выбора физической и геометрической структуры трубопроводных систем. Это открывает новые потенциальные возможности достижения наиболее эффективных режимов транспорта на стадии функционирования трубопроводной системы в условиях действия экстремальных факторов внешней среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харионовский В. В.* Повышение прочности трубопроводов в сложных условиях. М.:Недра, 1986.
2. *Харионовский В. В.* Надежность и ресурс конструкций газопроводов. М.: Недра, 2000.

3. *Рекач Ф. В.* Расчет допустимых динамических нагрузок на трубопровод // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2008. №1. С. 62–63.
4. *Гусейнзаде М. А.* Математические модели волнового течения в сложной трубопроводной системе. М.: Нефть и газ, 1989.
5. *Лурье М. В.* Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа М.: Нефть и газ, 2003.
6. *Гусев Е. Л., Бакулин В. Н., Марков В. Г.* Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. М.: Наука-Физматлит, 2008.
7. Термогидродинамика систем транспорта. Новосибирск: Наука, 1988.

ОПЫТ РАЗРАБОТКИ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПАКЕТОВ ПРОГРАММ SIGMAFLOW и VP2/3 ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА[1]

EXPERIENCE IN DEVELOPMENT AND USE OF SOFTWARE PACKAGE SIGMAFLOW and VP2/3 FOR SIMULATION OF HYDRODYNAMICS AND HEAT TRANSFER

Дектерев А. А.[1,2], Гаврилов А. А.[1], Минаков А. В.[1,2], Харламов Е. Б.[1],Гувернюк С. В.[3], Исаев С. А.[4], Судаков А. Г.[4], Баранов П. А.[4], Кэрт Б. Э.[5], Усачов Е. А.[6], Стрижак С. В.[7]

[1] *Институт теплофизики СО РАН, Красноярск, Россия*
dektrev@mail.ru
[2] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*
[3] *Институт механики МГУ, Москва, Россия*
[4] *Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия*
[5] *Балтийскй государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» имени Д.Ф.Устинова, Санкт-Петербург, Россия*
[6] *МК Центральный аэрогидродинамический инстиут, Москва, Россия*
[7] *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Бауман, Москва, Россия*

Многолетние усилия по разработке многоблочных вычислительных

[1] Работы выполнены при финансовой поддержке РФФИ (№№10-08-00510 и 11-01-00039) и ФЦП "Научные и педагогические кадры инновационной России" №2009_1.5_000-010.

технологий, основанных на решении факторизованными конечно-объемными методами исходных уравнений на разномасштабных пересекающихся структурированных сетках с неструктурированными вставками, адаптация и развитие математических моделей турбулентности, неоднородных и многофазных сред, кавитации, радиационного переноса, течений со свободной границей и др., привели к созданию отечественных специализированных многопрофильных пакетов VP2/3 (скорость-давление, двумерная и трехмерная версия) и SigmaFlow [1-5].

На рубеже 90-х гг, в целом, сформировалась методология конечно-объемного решения задач, в дальнейшем (на индустриальном этапе развития CFD) нашедшая отражение в пакетных технологиях. Ее основные черты следующие.

Дискретизация исходных уравнений в криволинейных неортогональных координатах, на центрированном шаблоне с расположением величин зависимых переменных в центре расчетной ячейки сетки.

Решение системы уравнений глобальными итерациями в рамках концепции расщепления по физическим процессам с использованием процедуры согласованной коррекции давления (SIMPLE) с регуляризацией Рхи-Чоу на центрированной сетке.

Дискретизация конвективных членов уравнений переноса в неявной части по противопоточным односторонним разностям и коррекцией в явной части до схем повышенного порядка апроксимации (схема Леонарда, TVD схемы, и др).

Повысить скорость сходимости глобальных итераций позволяет решение разностных уравнений методом неполной матричной факторизации или многосеточным методом.

За последнее десятилетие решен широкий круг фундаментальных, прикладных и эксплуатационных задач аэрогидромеханики и теплофизики, в результате собрана обширная библиотека специализированных моделирующих комплексов, имеющая общие каталоги математических моделей и методов решения уравнений с учетом разнообразных дифференциальных RANS и гибридных RANS/LES моделей турбулентности. Обобщенная процедура коррекции давления развита для расчета отрывных до- и сверхзвуковых течений вязкого газа, несжимаемой жидкости, двухфазных потоков, течений с подвижными границами. Акцент сделан на моделировании турбулентности в рамках подхода URANS (осредненных по Рейнольдсу нестационарных уравнений Навье-Стокса) и гибридного URANS/LES (LES – метод с прямым разрешением крупно масштабных вихревых структур) при использовании для замыкания уравнений движения модифицированной (с учетом

кривизны линий тока) версии модели переноса сдвиговых напряжений (MSST) Ментера. При решении ряда тестовых задач продемонстрирована приемлемость выбранных моделей для прогнозирования характеристик пространственных тепло- и массообменных процессов.

С использованием пакетов моделируются следующие процессы: стационарные и нестационарные течения жидкости и газа; до- и сверхзвуковые отрывные и струйные течения вязкого газа, в том числе со скачками уплотнения; течения неньютоновских жидкостей; турбулентные течения с использованием (U)RANS и гибридных RANS/LES моделей; конвективный, кондуктивный и радиационный теплообмен; химическое реагирование и процессы смешения в многокомпонентных смесях; горение газообразного, жидкого и твердого топлива; движение дисперсной фазы в несущем потоке (твердые частицы, капли, пузыри); процессы сушки и пиролиза, химического реагирования дисперсной фазы; задачи со свободными границами; движение твердых тел в газовом потоке; деформация твердого тела; течения с фазовыми переходами (плавление кристаллизация); кавитационные течения; течения с объемными силами.

Важно подчеркнуть, что в последние годы тестовые расчеты выполняются в тесном содружестве с экспериментаторами на основе разработанных компьютерных симуляторов экспериментальных установок и условий проведения физических опытов. Детальные численные исследования выполнены совместно с экспериментаторами НИИмехМГУ, СПбГПУ, ЦНИИ им.А.Н.Крылова, ИТ СО РАН (все Россия), университетов Саутгемптона (Великобритания) и Ростока (Германия), CIRA (Италия).

С помощью рассматриваемых пакетов получен ряд важных результатов по вихревой интенсификации теплообмена при обтекании лунчных рельефов и по управлению обтеканием тел с помощью вихревых ячеек, успешно решен ряд практических задач, в том числе: прогнозирование опасного сдвига ветра на этапах взлета-посадки воздушных судов, моделирование задымленности в залах метрополитена при пожаре в вагоне поезда, оценка вентиляции автомобильных тоннелей (в том числе тоннеля в Лефортово) и др. Также накоплен большой опыт расчета “реальных” прикладных задач: в энергетике при моделировании аэродинамики, горения и теплообмена в топочных камерах, при исследовании потока газа в газоходных системах, при оптимизационном моделировании с целью снижения экологически вредных выбросов, при расчетной оптимизации горелочных устройств для сжигания пылеугольного топлива, при расчете пылегазовых потоков в циклонных

аппаратах, сепараторах, при анализе нестационарных и кавитационных течений в проточных трактах гидротурбин и насосной техники; в металлургии при моделировании устройств с факельным горением, при оптимизации работы горелок по дожиганию электролизных газов, при моделировании МГД-течений расплава металла, при кристаллизации слитков, при совершенствовании газоотсосных систем корпусов, при моделировании аэродинамики запыленных потоков, при комплексном расчетном исследовании в химических технологиях при расчете аэродинамики и смешения газов в химических реакторах, при анализе гидравлических клапанов резервуаров нефтепродуктов, при моделировании физико-химических процессов в пористых средах, при исследовании течения в вихревых аппаратах; в экологии и безопасности производств, при исследовании распространения вредных выбросов в промышленных корпусах, при оптимизации режимов вентиляции помещений и зданий, при моделировании развития пожаров в помещениях, при исследовании вероятностей возгорания строений и т.д.

Объединение комплексов VP2/3 и SigmaFlow может быть положено в основу при разработке пилотного образца универсального открытого отечественного пакета типа для решения задач аэрогидромеханики и теплофизики – аналога международных пакетов OPENFOAM, SATURN.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А.* Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989.
2. *Белов И.А., Исаев С.А.* Моделирование турбулентных течений. Учебное пособие. СПб: БГТУ, 2001.
3. *Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. СПб, Судостроение, 2005.
4. *Исаев С.А., Судаков А.Г., Баранов П.А., Усачов А.Е., Стрижак С.В., Лоханский Я.К., Гувернюк С.В.* Разработка, верификация и применение основанного на многоблочных вычислительных технологиях распараллеленного пакета открытого типа VP2/3 для решения фундаментальных, прикладных и эксплуатационных задач аэромеханики и теплофизики // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование" , 2009. №17 (150). Вып. 3. С. 59–72.
5. *Дектерев А.А., Гаврилов А.А., Минаков А.А.* Современные возможности CFD кода SIGMAFLOW для решения теплофизических задач // Современная наука, 2010. Т.4. №2. С. 117–122.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ПАДАЮЩЕГО КОЛЛИМИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

RADIATION FIELD MODELING IN THE SEMITRANSPARENT MEDIUM WITH AN INCIDENT COLLIMATED RADIATION

Жирков О. Н., Тимофеев А. М.

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
f_z.sitc.ru

Построена и численно реализована математическая модель поля излучения в полупрозрачной среде, формирующегося под действием падающего коллимированного и диффузного излучения. Для решения задачи разработан подход на основе модифицированного метода средних потоков (СП-метода). Тестирование метода, проведенное путем сравнения с результатами других исследователей, подтвердило его надежность и высокую точность. В качестве примера проведен анализ влияния на поле излучения в водоемах различных факторов: собственного излучения среды, анизотропии рассеяния, отражательной способности дна.

АКУСТИКА СЛОИСТЫХ ПОРОУПРУГИХ СИСТЕМ

ACOUSTICS OF LAYERED POROELASTIC SYSTEMS

Исаков А. Е.

Институт гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия
foru86@mail.ru

Различные задачи механики сильно неоднородных сред и композитных материалов приводят к необходимости построения усредненных моделей для этих сред [1–3]. Требуется построить модель среды, локальные свойства которой резко меняются, и поэтому удобнее перейти от микроскопического ее описания к макроскопическому, т.е. рассматривать усредненные характеристики такой среды. Усредненные уравнения позволяют определить с большой точностью эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные

уравнения - близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений.

В анализе композитных материалов важную роль играют математические модели акустических и электромагнитных волн в гетерогенных средах. В настоящее время для построения таких моделей важную роль играет метод гомогенизации, поскольку он позволяет описать свойства композитов, исходя из свойств составляющих компонент.

В работе исследованы акустические волны в слоистой среде из упругих слоев и слоев вязкой жидкости. Строго доказан предельный переход методом двухмасштабной сходимости Нгуетсенга и получены эффективные константы среды в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э.Санчес-Паленсия* Неоднородные среды и теория колебаний Пер. с англ.-М.: Мир, 1984.
2. *Бахвалов Н.С. Папасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
3. *Dag Lukkassen, Gabriel Nguetseng, and Peter Wall* Two-scale convergence Int. J. Pure Appl. Math., 2(1):35–86, 2002.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА ГАЗА НА ОБРАЗОВАНИЕ И ДИССОЦИАЦИЮ ГАЗОВЫХ ГИДРАТОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

ESTIMATION OF THE GAS FLOW PARAMETERS INFLUENCE ON THE FORMATION AND DISSOCIATION OF GAS HYDRATES IN POROUS MEDIA

Капитонова Т. А.[1], Стручкова Г. П.[2]

Институт физико–технических проблем Севера имени В.П. Ларионова СО РАН, Якутск, Россия

[1]kapitonova@iptpn.ysn.ru

[2]g.p.struchkova@iptpn.ysn.ru

Моделирование фильтрационных процессов в пористой среде, насыщенной гетерогенной смесью газового гидрата, воды и газа необходимо при разработке газоносных пластов, находящихся в условиях многолетнемерзлых пород, так как многое технологические процессы при добыче газа сопровождаются образованием газовых гидратов, кроме

того, гидратные образования встречаются и в пористых пластах газовых месторождений.

Образование гидратов при добыче газа приводит к резкому росту фильтрационного сопротивления, падению забойного давления и дебита скважины. Затраты, связанные с предупреждением гидратообразования весьма значительны и достигают 30% себестоимости добываемого природного газа. Образование гидратов в пласте зависит от пластового давления, температуры и наличия поровой влаги.

Рассмотрим область, находящуюся в термодинамическом равновесии и заполненную гидратом, газом и водой. Скелет пористой среды не деформируется, образования пара и льда не происходит.

Для регулирования гидратообразования рассмотрим математическую модель, учитывающую движение воды, образующейся при разложении гидрата, реальные свойства газа и параметры пласта (гидрато- и влагонасыщенности и проницаемости) на характер диссоциации и фильтрации. Модель разработана на основе фундаментальных законов сохранения массы и энергии, где роль уравнений движения играет обобщенный закон фильтрации Дарси, коэффициенты проницаемости в котором являются функциями насыщенности соответствующей фазой.

Уравнение неразрывности для газа:

$$m\frac{\partial}{\partial t}((1-v)(1-s)\rho_g + v(1-\varepsilon)\rho_h) + \ \mathrm{div}\ \rho_{\mathrm{g}} V_g = 0. \tag{1}$$

Уравнение неразрывности для воды:

$$m\frac{\partial}{\partial t}((v\varepsilon\rho_h + (1-v)s\rho_w + \ \mathrm{div}\ \ \rho_{\mathrm{g}}\mathrm{V_g}\ = 0. \tag{2}$$

Уравнение движения: для газа

$$V_g = -\frac{k}{\mu_g} f_g(s)\ \mathrm{grad}\ P, \tag{3}$$

для воды

$$V_w = -\frac{k}{\mu_w} f_w(s)\ \mathrm{grad}\ P. \tag{4}$$

Фазовые проницаемости для газа и жидкости вычисляются по [1]:

$$f_g(s) = \begin{cases} (1-\frac{s}{0.9})^{3.5}(1+3s) & 0\ \leq\ \mathrm{s}\ \leq 0.9 \\ 0, & \mathrm{s} \geq\ 0.9, \end{cases}$$

$$f_w(s) = \begin{cases} (\frac{s-0,2}{0,8})^{3,5} & 0,2 \leq\ \mathrm{s}\ \leq 1 \\ 0, & \mathrm{s} \geq 0,2, \end{cases}$$

Уравнение энергии:

$$(\rho A)_e \frac{\partial T}{\partial t} - mq\rho_h \frac{\partial v}{\partial t} - m(1-v)(1-s)\left(1+\frac{T}{z}\right)\frac{\partial P}{\partial t} - k\left(\rho_w c_w \frac{f_w}{\mu_w} + \rho_g c_g \frac{f_g}{\mu_g}\right)\cdot \left[\text{grad } P \text{ grad } T - \frac{RT^2}{c_p P}\frac{\partial z}{\partial t}(\text{grad } P)^2\right] - \text{ div } \lambda_e \cdot \text{ grad } T = 0. \tag{5}$$

Коэффициент $z = z(P,T)$ принимаем в форме Бертло:

$$z = 1 + \frac{9}{128}\frac{P}{P_c}\frac{T_c}{T}\left(1 + 6\frac{T_c^2}{T^2}\right) \tag{6}$$

Выписанная система замыкается условием термодинамического равновесия смеси

$$T = \alpha_1 \ln P + \alpha_2, \tag{7}$$

где α_1 и α_2 - эмпирические коэффициенты (для метана $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 243,2$).

Таким образом, система уравнений (1-7) представляет собой полную систему, описывающую процесс образования и диссоциации газового гидрата в пористой среде.

Предполагается, что фазовый переход происходит в протяженной области. На границе раздела газ – гидрат, где существует либо отсутствует гидратная фаза предполагается непрерывность давления и температуры и разрыв гидрато- и водонасыщенности, а также условия, следующие из законов сохранения массы и энергии на скачке [2]. Алгоритм реализации предложенной модели описан в [3].

Условные обозначения: P - давление, T - температура, V - скорость фильтрации, ε—массовая концентрация воды в газовом гидрате, v, s-объемные гидрато- и водонасыщенность, k- проницаемость, ρ - плотность, z- сжимаемость, t - время. Индексы: h - газовый гидрат, w - вода, g - газ, c - критические значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондарев Э. А., Бабе Г. Д., Гройсман А. Г., Каниболотский М. А.* Механика образования гидратов в газовых потоках - Новосибирск: Наука, 1976.
2. *Седов Л. И.* Методы механики сплошной среды. Т.1. - Москва: Наука, 1973.
3. *Bondarev E. A., Kapitonova T. A.* Simulation of multiphase flow in porous media accompanied by gas hydrate formation and dissociation // Engineering Thermophysics, 1999. V.9, №1-2. P. 83–97.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНУЮ ТРЕЩИНУ[1]

THE EQUILIBRIUM PROBLEM TIMOSHENKO-TYPE PLATE WITH A VERTICAL CRACK

Лазарев Н. П.

ФГНУ «НИИ математики при ЯГУ», Якутск и
Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия
nyurgun@ngs.ru

Исследуется задача о равновесии упругой изотропной пластины, содержащей вертикальную трещину. При этом считаем, что деформирование пластины описывается с помощью модели Тимошенко [1]. На кривой, описывающей трещину, задаются краевые условия вида неравенств, описывающие взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Задача формулируется в вариационном виде.

Установлена единственная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины, содержащей трещину. Из вариационной постановки задачи получена полная система краевых условий, определяющая соответствующую краевую задачу. Доказана эквивалентность двух постановок: дифференциальной и вариационной. При условии выполнения дополнительных предположений на геометрию трещины, с помощью конечно—разностных отношений [2], доказано что решение обладает гладкостью, выше заданной постановкой задачи. Используя результаты о внутренней гладкости решений эллиптических уравнений [3], показана бесконечная дифференцируемость функции решения при дополнительных условиях "нулевого" раскрытия трещины и бесконечной гладкости функции внешних нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
2. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва: Наука, 1976.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир, 1971.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 10-01-00054).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭВОЛЮЦИИ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТАХ РАЗЛИЧНОГО МАСШТАБА[1]

MODELING OF GEOMECHANICAL FIELDS EVOLUTION PROCESSES IN THE NATURAL OBJECTS AT DIFFERENT SCALE

Назарова Л. А.

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск, Россия
larisa@misd.nsc.ru

Диагностика состояния массива горных пород при техногенном воздействии, геомеханическое обоснование технологий отработки месторождений полезных ископаемых, оценка устойчивости подземных объектов — проблемы, связанные с необходимостью моделировать процессы деформирования и разрушения геосред. Искажение траектории скважины, разрушение прискважинной зоны и уменьшение ее проницаемости — вот далеко не полный перечень нежелательных явлений, возникающих при глубоком бурении для добычи углеводородов. На основе упругопластической модели описан процесс формирования и эволюции зон необратимых деформаций D в окрестности движущегося забоя скважины. Показано, что горизонтальные размеры D пропорциональны квадрату отношения горизонтальных и вертикальных напряжений в природном поле, а изменение проницаемости может достигать 15% в зависимости от глубины и прочностных свойств горных пород.

При моделировании процессов деформирования и разрушения природных объектов одной из основных проблем является выбор значений констант уравнений состояния и формулировка граничных условий, что связано с существенной пространственной изменчивостью свойств пород и отсутствием прямых методов количественной оценки параметров естественных механических полей в средне- и крупномасштабных геообъектах. Поэтому сформулированы и решены соответствующие обратные задачи, входной информацией для которых служат как прямые (напряжения, смещения), так и косвенные (геофизические, сейсмологические) данные о параметрах геомеханических полей. Предложен метод реконструкции краевых условий по информации о полях смещений или деформаций во внутренних точках области, заключающийся

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-05-00975, № 10-05-00736) и Интеграционного проекта СО РАН № 44.

в построении дискретной функции Грина для соответствующей краевой задачи и последующей минимизации целевой функции. Выполнены оценки смещений на внешних тектонических границах Евразии по сейсмологическим данным о фокальных механизмах землетрясений в Центральной Азии (Тибет, Алтае-Саянская складчатая область). Предложен способ определения параметров эквивалентного источника (моделирующего очаг готовящегося динамического события) по вариации компонент поля смещений на поверхности Земли, позволяющий дать априорную количественную оценку координат гипоцентра и магнитуды предстоящего сейсмического события по GPS данным.

Разработана методика оценки коэффициентов уравнений состояния, описывающих реологические процессы деформирования и разрушения горных пород, основанная на решении обратных задач по данным измерений in situ изменения размеров подземных полостей в процессе выемки полезных ископаемых.

Предложен подход к описанию геодинамических процессов в природных объектах, базирующийся на поэтапном решении краевых задач для иерархической последовательности объемных геомеханических моделей. Граничные условия на первом - глобальном уровне формулируются, как правило, на основе косвенной (сейсмотектонической, геодезической) информации о полях напряжений в литосфере. На втором (региональном) и третьем (локальном) уровне для этой цели используются результаты расчетов с предыдущего иерархического уровня, уточняемые по данным измерений in situ параметров геомеханических полей. Реализация подхода выполнена для объектов "Центральная Азия и ее обрамление" , "Алтае-Саянская складчатая область" , "регион рудных месторождений Горной Шории" , и "Таштагольское железорудное месторождение". Для последнего построена трехмерная геомеханическая модель и описан процесс эволюции напряжений при его отработке. Это дало возможность на основе статистического анализа установить количественную связь между параметрами напряженного состояния, местоположением очагов и суммарной энергией индуцированных горными работами динамических событий. Такой подход, позволяющий прогнозировать уровень техногенной сейсмичности, апробирован с использованием базы данных сейсмособытий Таштагольского месторождения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ ОТБОРЕ ГАЗА

INVESTIGATION OF TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL IN THE SELECTION OF GAS

Николаев В. Е.[1], **Иванов Г. И.**[2]

Северо–Восточный федеральный университет, Якутск, Россия
[1]venik60@mail.ru, [2]ivganya@mail.ru

В настоящей работе проведен вычислительный эксперимент для исследования влияния параметров двумерной математической модели и типа граничных условий на динамику изменения полей давления и температуры при отборе газа через центральную скважину. Проведен сравнительный анализ для двух случаев газа: реального и идеального. Для описания процесса отбора газа использовалась полная нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, полученная из законов сохранения массы и энергии, закона Дарси и уравнения неразрывности. На скважине задаются два режима отбора: постоянный массовый расход и постоянное давление. На внешней границе температура и давление считаются постоянными. Сверху происходит теплообмен с постилающей породой по закону Ньютона. Снизу ставится условие симметрии. В начальный момент времени, давление и температура считаются постоянными. Выявлены следующие особенности изменения температуры и давления: при обоих режимах отбора изменение температурных полей на верхнем и нижнем границах пласта носит волновой характер, и не наблюдаются существенные качественные различия между ними, при этом динамика изменения давления представляет собой монотонно убывающую функцию и остается практически неизменной. Изменение расхода отбора газа приводит к существенному изменению распределения температурного поля, при этом не наблюдается качественное изменение распределения давления; аналогичные результаты видны при изменении давления отбора газа. Сравнительный анализ результатов для реального и идеального газа показал, что реальные свойства газа при его фильтрации оказывают достаточно большое влияние: несмотря на качественные сходства, наблюдаются существенные количественные различия между распределениями температур и давлений в обоих режимах отбора.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРИОГЕННОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ГОРНЫХ ПОРОДАХ В ПРИЛОЖЕНИИ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ И УСЛОВИЯМ ФОРМИРОВАНИЯ ЛЬДИСТОСТИ В ПРОМЕРЗАЮЩИХ ОСАДОЧНЫХ ПОРОДАХ

THE METHOD OF DECISION THE PROBLEMS CRYOGENIC HEAT AND MASS TRANSFER IN ROCKS IN EXHIBIT TO ICE FORMATION IN FREEZING SEDIMENTARY

Попов В. И.

Институт горного дела Севера имени Н.В. Черского СО РАН
Якутск, Россия
popov.gtf@mail.ru

Н.А. Цытовичем сформулирован принцип, утверждающий, что «..количество, состав и свойства незамерзшей воды и льда, содержащихся в мерзлых грунтах не остаются постоянными, а изменяются с изменением внешних воздействий, находясь в динамическом равновесии с последними».

Инструментом анализа адекватным высказанному принципу служит термодинамический подход, опыт применения которого для задач промерзания достаточно разнообразен. В рамках данного подхода рассмотрен случай, когда параметры состояния – концентрация, влажность и температура меняются по координате и определяются из решения уравнений баланса тепла и компонентов. Вывод уравнений сводится к последовательному учету вклада конвективного, диффузионного и миграционного потоков. А также процессов в порах породы – сорбции ионов и изменения их концентрации за счет химических реакций и роста кристаллов льда.

Задачи совместного тепло-влаго-солепереноса при фазовых превращениях решаются методом введения эффективной теплоемкости. Но возникают некоторые проблемы связанные с процедурой распределения источника тепла (и массы) фазового превращения в некотором температурном диапазоне. При этом становится затруднительным выполнение требования однозначной связи между влажностью породы, содержанием растворенных компонентов и температурой. Последняя определяется как осредненный результат решения уравнения теплопроводности, теряя свое значение параметра фазового равновесия.

В соответствии с разработанным методом система уравнений баланса предварительно расщепляется по физическим процессам. Для иллюстрации метода, в качестве этих процессов выбраны а) диффузионное выравнивание полей температуры, влажности и концентрации, и б) фазовый переход. Поэтому решение исходной задачи представляется в виде последовательного решения подзадач: а) диффузии и б) фазового перехода.

В рамках подзадачи (б) определяются локальные содержания тепла, влаги и соли для условий термодинамически изолированной подсистемы в расчетном узле.

Для определения стока влаги Δm на временном шаге в результате расщепления задачи и использования уравнения фазового состояния поровой влаги получено простое соотношение

$$\Delta m = c_t(T_2 - T_1)/(L + A_t\,(\,{}^{\partial T_F}/_{\partial w}\,) + (A_w - c_{lod})T_1),$$

Предлагаемый алгоритм решения задач тепломассопереноса с фазовым превращением, с использованием уравнения фазового равновесия сводится к выполнению на каждом шаге по времени следующих действий:

1. Решается система уравнений диффузионно-конвективного переноса тепла, влаги и солей без фазовых превращений.

2. По вышеприведенному выражению рассчитывается количество замерзшей (конденсировавшейся, сублимировавшейся) влаги.

3. По соотношениям справедливым для термодинамически изолированных подсистем рассчитываются равновесные составы фаз и компонентов, а затем температура фазового превращения $T_F = T_F(C, w)$.

4. Переход на следующий временной шаг (пункт 1).

Применимость представленного алгоритма к решению задач тепломассопереноса достаточно универсальна. В качестве иллюстрации рассмотрен вопрос распределения и формирования льдистости в обьеме промерзающей толщи осадочных пород при знакопеременной температуре среды теплообмена.

Установлен факт периодического льдовыделения в обьеме породы.

Сравнение тестовых расчетов глубины промерзания с точным решением задачи Стефана дало расхождение в 6% для малых времен и около 2% для больших (>100 часов).

Контрольные расчеты показывают удовлетворительное описание процессов распределения тепла, влажности и концентраций. Имеется возможность непосредственно рассчитывать многозонные задачи, так как фазовое равновесие определяется в каждом расчетном узле. Налицо существенное снижение трудоемкости вычислений, так как задача в минимальной конфигурации сводится к решению трех нелинейных уравнений параболического типа без фазового перехода и расчету состава по балансовым формулам для изолированных подсистем.

ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

CONTACT PROBLEMS FOR PLATES CONTAINING RIGID INCLUSIONS

Ротанова Т. А.

Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия
t.stekina@gmail.com

Задачи о контакте упругих тел со свободной границей с каждым годом привлекают все большее внимание математиков. Задачи со свободными границами — это задачи, в которых неизвестная заранее функция в разных частях области удовлетворяет качественно различным условиям. Область контакта определяется в процессе самого решения задачи. Ограничения, накладываемые на решения задач данного класса, носят вид неравенств и являются условиями взаимного непроникания контактирующих тел. Таким образом, краевые условия имеют вид системы равенств и неравенств.

В связи с активным изучением в последние годы композитных материалов в настоящее время представляет огромный интерес исследование нового класса контактных задач со свободной границей, а именно, задач о контакте упругих тел, содержащих жесткие включения. Одной из особенностей, возникающих при анализе пластин, содержащих жесткие включения, является то, что в области жесткого включения не выполняется уравнение равновесия. В ряде недавних работ, см., например, [1], посвященных описанию и анализу контактных задач об

[1]Работа выполнена при поддержке РФЦП "Научные и научно- педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (П597), гранта РФФИ N 10-01-00054 и гранта Президента РФ (МК-222.2010.1).

упругих телах, содержащих жесткие включения, был предложен метод, позволяющий выписать полную систему краевых условий на границе жесткого включения. Особый интерес представляет собой случай двух и более жестких включений, с заданным на их границах условием непроникания. В задачах такого рода влияние внешних сил на жесткую часть пластины описывается с помощью уравнения и неравенства в соответствии с принципом виртуальных перемещений.

В представленной работе рассматривается задача о контакте двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу, под действием внешних сил (модель Кирхгофа-Лява). Каждая из пластин содержит жесткое включение, выходящее на область возможного контакта, и таким образом, выполняется принцип виртуальных перемещений. В работе проанализированы различные случаи расположения жестких включений. Для каждого случая сформулирована вариационная постановка задачи, доказаны существование и единственность решения, выписана полная система краевых условий в предположении гладкости решения, показана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Известия РАН, 2010. № 5. С. 98–110.

ОБ ОДНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВРАЩЕНИЯ ВЕТРОТУРБИНЫ ДАРЬЕ

ON ONE MODELING OF THE DARIER'S WIND TURBINE ROTATION

Тулепбергенов А. К.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
Алматы, Казахстан
sylbek12@mail.ru.

Работа посвящена теоретическому исследованию взаимодействия вращающейся турбины Дарье типа Н-ротор с ветровым потоком [1, 2]. Использование природных экологически чистых энергии, в частности ветровой, связано с применением ветроэнергетических аппаратов. Превращение стихийной энергии ветра и преобразование ее в другие

энергетические виды, связано с созданием ветротурбин [1-3]. Целью настоящей работы является выявление особенности взаимодействия работающей турбины Дарье с набегающим воздушным потоком. На кафедре «Механика» КазНУ им. аль-Фараби в течение последних 15 лет проводятся теоретические и экспериментальные исследования работы турбины Дарье Н–ротор с прямыми лопастями [4, 5].

Построена математическая модель, основанная на представлении о взаимодействии элементарных трубок тока, с движущейся рабочей лопастью турбины, с привлечением методов векторного анализа к определению основных аэродинамических параметров турбины Дарье. Для количественного определения основных характеристик рассматриваемой задачи разработана итерационная программа. В результате определены поля индуктивных скоростей потока, поле давления, вращательный момент и коэффициент использования энергии ветра турбины Дарье.

Предложенный метод анализа взаимодействия вращающейся турбины Дарье типа Н-ротор со стационарным воздушным потоком может быть положен в основу выявления основных параметров ветроагрегата при определении вариантов конструкции.

В теоретических подходах к расчёту аэродинамики ветротурбин наибольшее развитие получили представления о взаимодействии трубки тока с вращающимся ветроколесом как активным проницаемым диском. Получены все основные результаты: крутящий момент, связь мощности машины с энергией ветра, коэффициент использования энергии ветра и другие характеристики. Для определения угловой скорости вращения ротора Дарье, при воздействии ветрового потока применяем теорему об изменении кинетического момента механической системы. Полученные результаты и развитые в методы анализа будут полезны для проектно-конструкторских работ при создании промышленных образцов ветроагрегата карусельного типа. В докладе будут подробно излагаться постановка задачи, полученные результаты и их анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Турян К. Дж., Стриклэнд Дж. Х., Бэрг Д. Э.* Мощность ветроэлектрических агрегатов с вертикальной осью вращения // Аэрокосмическая техника, 1988. №8. С. 105–121.
2. *Моретти П. М., Дивон Л. В.* Современные ветряные двигатели // В мире науки, 1986. №8. С. 10–12.
3. *Безруких П. П.* Использование энергии ветра. Техника, экономика, экология. М.: Колос, 2008.

4. *Ершина А. К., Ершин Ш. А., Гуль В. И., Тулепбергенов А. К.* Экспериментальное исследование поле течения стационарного воздушного потока при работе четырехлопастной турбины "Дарье"// Известия МН-АН РК: Серия физико-математическая, 2000. №3(211). С. 72–78.
5. *Shahbaz Yershin, Ainakul Yershina, Manatbayev Rustem, Asylbek Tulepbergenov* Bi-Darrie windturbine // ASME–ATI–UIT 2010: Conference on Thermal and Environmental lssues in Energy Systems. Sorrento, Italy, 2010. P. 615–619.

НОВЫЙ ПОДХОД К МОНОТОНИЗАЦИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ[1]

A NEW APPROACH TO MONOTONIZATION OF DIFFERENCE SCHEMES

Хакимзянов Г. С.[1], Шокина Н. Ю.[2]

Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
[1]khak@ict.nsc.ru, [2]shokina@mathematik.uni-freiburg.de

Стандартный способ монотонизации [1] разностных схем второго порядка аппроксимации основан на использовании ограничителей потоков для локального переключения на противопоточную схему. В современных TVD-схемах высокого порядка аппроксимации используются различные способы реконструкции значений функций на границах ячеек по их значениям в центрах соседних ячеек [2]. В настоящей работе предлагается новый подход к построению монотонных разностных схем, основанный на исследовании их дифференциальных приближений. Идея метода демонстрируется на явной схеме предиктор–корректор второго порядка аппроксимации для уравнения переноса с постоянным коэффициентом a:

$$\begin{aligned} &u^*_{j+1/2} = \frac{1}{2}(u^n_{j+1} + u^n_j) - a\frac{\tau}{2}\left(1 + \theta^n_{j+1/2}\right) u^n_{x,j+1/2}, \\ &\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + a\frac{u^*_{j+1/2} - u^*_{j-1/2}}{h} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для выбора параметра $\theta = O(h)$ используется п.д.п. схемы (1):

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-05-00294а, 10-05-91052-НЦНИ), Программы Государственной поддержки научных школ РФ (НШ-6068.2010.9) и Проекта IV.31.2.1. программы фундаментальных исследований СО РАН.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2\tau}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{ah^2}{6}\left(a^2æ^2 - 1\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \qquad (2)$$

В тех подобластях области решения, в которых возникает угроза появления осцилляций численного решения, необходимо изменить в нужную сторону дисперсию разностной схемы. Подберем функцию θ так, чтобы диссипативный член п.д.п. частично компенсировал дисперсионный. Например, при $a > 0$ подходит функция $\theta = \overline{\theta} h u_{xx}/u_x$, где $\overline{\theta}$ — некоторая положительная постоянная. Задавая то или иное значение для этой постоянной, мы можем менять величину и даже знак коэффициента при третьей производной, т. е. можем управлять дисперсией разностной схемы.

Одна из возможных формул задания схемного параметра для произвольного знака коэффициента a имеет следующий вид:

$$\theta_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \left|u_{x,j+1/2}\right| \le \left|u_{x,j+1/2-s}\right| \quad \text{и} \\ & \qquad u_{x,j+1/2}\cdot u_{x,j+1/2-s} \ge 0; \\ \overline{\theta}\left(1-\xi_{j+1/2}\right) & \text{при} \quad \left|u_{x,j+1/2}\right| > \left|u_{x,j+1/2-s}\right| \quad \text{и} \\ & \qquad u_{x,j+1/2}\cdot u_{x,j+1/2-s} \ge 0; \\ \overline{\theta} & \text{при} \quad u_{x,j+1/2}\cdot u_{x,j+1/2-s} < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $s = \operatorname{sgn} a$, $\xi_{j+1/2} = u^n_{x,j+1/2-s}/u^n_{x,j+1/2}$. Справедлива следующая

Теорема. *Выполнение условий*

$$Cr = \frac{|a|\tau}{h} < 1, \qquad \theta_0 = \frac{1}{Cr} - 1 \le \overline{\theta} \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Cr^2} - 1\right)$$

достаточно для того, чтобы схема предиктор–корректор (1) с переменным параметром (3) сохраняла монотонность численного решения.

Отметим, что при использовании схемного параметра (3) с постоянной $\overline{\theta} = \theta_0$ схема предиктор–корректор (1) превращается в известную TVD-схему Хартена [1]. Все другие известные TVD-схемы также могут быть получены на основе анализа п.д.п. (2). Рассмотренную здесь на простейшем примере новую технологию монотонизации удалось обобщить для нелинейного уравнения переноса, уравнений мелкой воды, для решения задач распространения фронта пламени как на равномерных, так и на подвижных неравномерных сетках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Physics, 1983. V. 49, №. 3. P. 357–393.
2. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

ТЕЧЕНИЯ В НЕНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ И КАПИЛЛЯРНЫЕ СИЛЫ[1]

FLOW IN UNSATURATED POROUS MEDIA AND CAPILLARY FORCES

Цыпкин Г. Г.

Институт проблем механики имени А.Ю.Ишлинского РАН
Москва, Россия
tsypkin@ipmnet.ru

Рассматриваются два подхода к построению математических моделей процессов переноса в грунтах и породах. В основе первого подхода лежит система эффективных уравнений, которая в простейшем случае сводится к нелинейному диффузионному уравнению для влагонасыщенности с коэффициентом, определяемым экспериментально. Второй подход базируется на методах механики гетерогенных сред, а основные уравнения представляют собой законы сохранения и соотношения термодинамики.

Представлены аналитические решения задач о кипении воды в геотермальном резервуаре и о фазовом переходе вода–лед в ненасыщенных грунтах, сформулированные на основе механики гетерогенных сред и учитывающие влияние капиллярных сил. В первом случае капиллярные силы действуют на поверхности фазового перехода, а во втором – в области совместного существования воды и воздуха. Выделен диапазон параметров, когда перераспределение водонасыщенности описывается одним нелинейным уравнением, подобным эффективному уравнению переноса влаги.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsypkin G. G., Calore K.* Influence of capillary forces on water injection into hot rock, saturated with superheated vapour // Int. J. Heat and Mass Transfer, 2007. V. 50. P. 3195–3202.
2. *Цыпкин Г. Г.* Влияние капиллярных сил на распределение влагонасыщенности при протаивании мерзлого грунта // Известия РАН. МЖГ, 2010. № 6. С. 130–140.

[1]Работа выполнена при поддержке Федерального агенства по науке и инновациям РФ (проект 2009-1.1.-224-010-015) и РФФИ (проект 09-01-00247).

СОДЕРЖАНИЕ

Itou H. On Convergent Expansions of Solutions of the Linearized Elasticity Equation Near Singular Points **4**

Karabasov S.A. Acoustics in Energy, Climate Change and Bio-molecular Simulations **5**

Kravtsov S., Kamenkovich I. etc. On the Mechanisms of Late 20th Century Sea-surface Temperature Trends in the Southern Ocean **6**

Kurganov A. Central Schemes: A Powerful Black-Box-Solver For Nonlinear Hyperbolic Pdes **6**

Вабищевич П. Н. Схемы расщепления на основе аппроксимации оператора перехода **8**

Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С. Математические модели для расчета неустановившихся течений в системах открытых русел и водоемов **9**

Гузев М.А., Дмитриев А.А. Спектральные характеристики двухкомпонентной модели молекулярной динамики **10**

Кожанов А.И. О некоторых задачах математического моделирования процессов динамики биологических популяций **12**

Пятков С.Г. О некоторых классах обратных задач для параболических уравнений и систем **13**

Романов В.Г. Оценка устойчивости решения в обратной задаче электродинамики **15**

Солдатов А.П. Краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка **17**

Хлуднев А.М. Об изгибе упругих пластин с тонкими жесткими включениями **19**

Mamadaliev N.K. On Presentation of the Solution of Modified Cauchy Problem for Hyperbolic Equation of Second Kind **20**

Алдашев С.А., Сеилханова Р.Б. Задачи с отходом от характеристики и сопряженные им задачи для одного класса многомерных гиперболических уравнений **21**

Антипин В.И. Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа **24**

Аттаев А.Х. Задача с граничными условиями для нагруженного волнового уравнения **25**

Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И. Устойчивость модели динамики охраняемой популяции при оптимизации функции добычи **27**

Егоров И.Е. О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа **29**

Егорова А.А. Об одной задаче поведения тонкого неоднородного стержня из материала Кельвина–Фойгхта при наличии сосредоточенных и распределенных сил и моментов **30**

Ермекбаев Е.Ж. Разрешимость задачи Дарбу–Проттера для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка **31**

Исхоков С.А., Гадоев М.Г., Петрова М.Н. Некоторые спектральные свойства одного класса эллиптических операторов в предельно-цилиндрической области **33**

Кадиркулов Б.Ж. О гладкости решения одной краевой задачи для уравнения Лапласа в классах Гельдера **35**

Львов А.П. Об одной нелокальной краевой задаче для неклассического уравнения с меняющимся направлением времени . . . **36**

Лукина Г.А. Краевая задача с интегральными граничными условиями для ультрапараболических уравнений **39**

Мамчуев М.О. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения с производными Римана–Лиувилля **40**

Марков В.Г. Об одной спектральной задаче с индефинитной метрикой в гильбертовом пространстве **42**

Миронов А.Е. Коммутирующие дифференциальные операторы . **44**

Николаев Н.Н. Исследование обратной задачи для уравнения третьего порядка **45**

Ошоров Б.Б., Ошоров Бато Б. О неклассических системах уравнений в частных производных первого порядка **47**

Павлов С.С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением **50**

Пинигина Н.Р. Краевая задача для одного класса вырождающихся систем соболевского типа **51**

Подгаев А.Г. О задаче управления величиной массы растаявшего вещества **54**

Попов Н.С. Исследование краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными краевыми условиями **55**

Попов С.В. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени с общими условиями склеивания **57**

Попова Т.С. Задача о равновесии вязкоупругой пластины с жестким включением **58**

Прокопьев А.В. Разрешимость обратной задачи для эллиптико-параболического уравнения **59**

Псху А.В. Задача коши для уравнения диффузии дробного порядка со многими временными переменными **60**

Рудой Е.М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова–Райса для упругого тела с жестким включением и трещиной **62**

Салахитдинов М.С. Аналог задачи Пуанкаре–Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода **63**

Слепцова А.Б., Егоров И.Е. Третья краевая задача для эллиптико–параболического уравнения с меняющимся направлением времени нечетного порядка **65**

Спиридонова Н.Р. О гладких решениях задачи Трикоми **67**

Спиридонова С.Н. Краевая задача для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка **68**

Тарасова Г.И. Вариационная задача дирихле для вырождающегося квазилинейного уравнения **70**

Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Задача Веригина для квазилинейных параболических уравнений **71**

Тихонова И.М. Стационарный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка **73**

Турганбаев А.А. Разрешимость задачи Дарбу для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений четвертого порядка с оператором Чаплыгина **74**

Федоров Ф.М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений **76**

Хубиев К.У. Об одной нелокальной задаче для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа . . **77**

Хуштова Ф.Г. Краевая задача для уравнения параболического типа со знакопеременной характеристической формой **79**

Чеботарев А.Ю. Обратные задачи для систем Навье–Стокса с конечномерным переопределением **81**

Шадрина А.И. О разрешимости краевой задачи для параболического уравнения с нелокальным граничным условием Самарского **83**

Akimov F.R. The game theory in online advertising **85**

Архипова А.А. Неподвижные точки функционирования булевой модели генных сетей **86**

Бакулина М.П. Универсальное кодирование длин серий для источников с малой энтропией **88**

Бородин О.В., Иванова А.О. Ациклическая раскраска плоских графов и связанные с нею задачи **90**

Бородин О.В., Иванова А.О. Инъективная и 2-дистанционная раскраски разреженных плоских графов **92**

Бубякин И.В. К дифференциальной геометрии n-мерных многообразий m-мерных плоскостей проективного пространства P^n **94**

Егорова Д.В. Новое уравнение на метрики Калаби–Яу в малых размерностях **95**

Егорова Р.И., Кайгородов С.П. О разбиении множества объектов в задаче распределения n объектов между n участниками . . **96**

Лукин В.С. Численное решение трехагентной дифференциальной игры **97**

Лютикова Л.А. Решение слабоформализованных задач методами логического дифференцирования **98**

Местников С.В., Эверстова Г.В. Оценки времени обнаружения в игре поиска неподвижного объекта в круге **100**

Прелов В.В. О связи q-полиномов гаусса и оценки эффективности трейдерских операций **102**

Троева М.С. Об одной бескоалиционной дифференциальной игре N лиц в банаховом пространстве **103**

Chertock A. Interaction dynamics of singular wave fronts computed by particle methods **105**

Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Mathematical Modeling and a New Quasy-Monotone Numerical Method for Pulse Laser-Target Interactions **106**

Аверина Т.А. Статистическое моделирование некоторых задач радиотехники **108**

Акимов М.П., Старостин Н.П., Мордовской С.Д. Динамика температурного поля в вечномерзлом грунте при воздействии полимерного трубопровода теплоснабжения **110**

Алексеев В.Д. Численное моделирование трубопроводного транспорта **112**

Аммосова О.А., Старостин Н.П. Определение технологических режимов стыковой сварки полиэтиленовых труб для газопроводов на основе моделирования теплового процесса **113**

Аммосова О.А., Старостин Н.П., Андреев Б.И. Численное моделирование теплового процесса при сварке армированных полиэтиленовых труб **115**

Астракова А.С., Банников Д.В. и др. Численный метод определения конфигурации датчиков, регистрирующей возмущения с заданным амплитудным порогом за минимальное время . . **117**

Бескрованов В.В., Юрьев Г.С., Капитанов А.Н. Некоторые вопросы разнообразия кристаллических форм углерода **119**

Бубякина Г.И., Бубякин И.В. О применении второго закона кеплера в социологических исследованиях **121**

Будугаева В.А. Об одном способе гашения собственных колебаний цилиндрической оболочки **123**

Вабищевич П.Н., Васильева М.В. Итерационные методы решения задачи для давления при многофазной фильтрации . . . **126**

Васильева М.А., Кондаков А.С., Старостин Н.П. Моделирование теплового процесса и диагностика трения в подшипниках скольжения с учетом движения вала **127**

Григорьев Ю.М., Борисова М.Н., Артемьева Е.С. Математическое моделирование волн тока и напряжения, индуцированных грозовыми разрядами в линиях передач **128**

Егорова А.Н., Тимофеева Т.С. Численное моделирование процесса вертикального вытеснения смешивающихся жидкостей из трещиновато-пористых сред **130**

Егорова Е.Р. Вычислительные методы в исследовании уравнений модели двухкомпонентной холодной плазмы **131**

Иванов Ф.В. Ращепления с сохранением свойств исходной разностной схемы **132**

Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А. Применение спектрального метода Лагерра для численного моделирования сейсмических полей в пористых средах для диссипативного случая **134**

Исматов Е.И., Сарсенбаев Б.О. Математическое моделирование легких кластерных ядер **136**

Карачанская Е.В. Моделирование с вероятностью 1 развития стохастической системы при наличии сохраняющихся свойств . . **138**

Ларионова И.Г. Численное решение деформационной задачи при промерзании **139**

Маматов Ш.М. Об одной задаче математического моделирования в технологических процессах сушки овощей **140**

Мордовской С.Д., Леверьев В.С. Моделирование замерзания насыщенной фильтрующейся среды **142**

Мордовской С.Д., Данилов Н.Д., Шадрин В.Ю. Прогнозирование возможности размещения в условиях многолетнемерзлых грунтов неотапливаемого гаража под зданием, возведенным на подсыпке **144**

Никифорова Л.В., Яковлев Б.В. Моделирование катодного пятна полевой электронной эмиссии **145**

Ним Ю.А. Аналитическая модель технологии импульсного электромагнитного каротажа горизонтального ствола скважины при разработке нефтегазовых месторождений **146**

Охлопков Г.Н. Система эконометрических моделей прогнозирования сводного индекса потребительских цен по видам товаров и услуг **149**

Павлов Н.Н., Шадрин В.Ю. О численном расчете температурного поля угловых соединений наружных ограждающих конструкций **151**

Павлова Н.В. Модельная задача конвективного теплообмена охлаждающих устройств в насыщенной среде **153**

Пермяков П.П., Аммосов А.П., Попов Г.Г. Прогноз развития экзогенных процессов в основании нефтегазопровода **154**

Пермяков П.П., Резцова А.Н. Математическое моделирование теплосолевлагопереноса при реконструкции линейных сооружений **156**

Пермяков П.П., Попов Г.Г., Матвеева М.В. Математические модели пучения и осадка в промерзающих-протаивающих грунтах **156**

Пилипенко Н.В., Гладских Д.А. Метод решения прямых и обратных задач теплопроводности на основе дифференциально-разностных моделей теплопереноса **158**

Романова Е.В., Тихонов А.Г. Вопросы разработки технологии эконометрического моделирования **159**

Ромащенко Ю.А., Шарин Е.П. Квазистационарная модель структуры магнитного облака **160**

Саввинова Н.А., Рубцов Н.Н., Слепцов С.Д. Математическое моделирование теплового режима полупрозрачного слоя при радиационном нагреве **161**

Сивцева В.В., Старостин Н.П. Моделирование теплового процесса муфтовой сварки полиэтиленовых труб с учетом двухфазной области **163**

Старостин Н.П. Прямые и обратные задачи теплообмена при климатических испытаниях полимерных материалов **164**

Тимофеев В.Б. Движение изотропной вязкой плазмы в поле вращающегося намагниченного шара **166**

Тихонов А.Г. Расчет точечных источников тепла в стационарном режиме для прямоугольной области **168**

Тихонова О.А. Численное решение нелокальной краевой задачи для параболического уравнения **169**

Тмур А.Б., Индиенко А.В. Адаптация математической модели нефтепровода в режиме реального времени **171**

Федоров В.Н. Решение прямой задачи подповерхностной радиолокации модифицированным методом планарных цепей **173**

Шарков А.В., Кораблев В.А. и др. Математическое моделирование нестационарных температурных полей в калориметрах для определения теплопроводности материалов **175**

Шестакова Т.П. Исследование математических моделей конкуренции трех популяций **176**

Юрьев Г.С., Бескрованов В.В., Долматов В.У. Компьютерное моделирование гибридных наночастиц **178**

Utyuzhnikov S.V. On a Non-Overlapping Domain Decomposition Approach and its Applications **181**

Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Численный анализ экстремальных задач для уравнений тепловой конвекции **183**

Афанасьева Н.М. Исследование схем аппроксимаций для уравнения насыщенности в задачах двухфазной фильтрации **184**

Бондарев Э.А., Рожин И.И., Аргунова К.К. Вычислительный эксперимент в задачах добычи природного газа **185**

Винокуров Г.Г., Попов О.Н. Статистическое моделирование профиля поверхности трения порошковых покрытий, получаемых высокоэнергетическими технологиями **186**

Гаврильева А.А. К устойчивости установившихся сдвиговых течений идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска **188**

Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е., Мохначевский А.Н. Математическое моделирование движений твердого и жидкого ядер земли, вызванных приливными деформациями **189**

Гусев Е.Л. Методы расчета и оптимизации структуры систем трубопроводного транспорта при воздействии экстремальных факторов внешней среды **191**

Дектерев А.А., Гаврилов А.А. и др. Опыт разработки и использования пакетов программ SIGMAFLOW и VP2/3 для моделирования задач гидродинамики и теплообмена **194**

Жирков О.Н., Тимофеев А.М. Моделирование поля излучения в полупрозрачной среде с учетом падающего коллимированного излучения **198**

Исаков А.Е. Акустика слоистых пороупругих систем **198**

Капитонова Т.А., Стручкова Г.П. Оценка влияния параметров потока газа на образование и диссоциацию газовых гидратов в пористых средах **199**

Лазарев Н.П. Задача о равновесии пластины модели Тимошенко, содержащей вертикальную трещину **202**

Назарова Л.А. Моделирование процессов эволюции геомеханических полей в природных объектах различного масштаба . . . **203**

Николаев В. Е., Иванов Г. И. Исследование двумерной математической модели при отборе газа **205**

Попов В.И. Метод решения задач криогенного тепломассопереноса в горных породах в приложении к распределению и условиям формирования льдистости в промерзающих осадочных породах **206**

Ротанова Т.А. Задачи о контакте упругих пластин с жесткими включениями **208**

Тулепбергенов А.К. Об одном моделировании вращения ветротурбины Дарье **209**

Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Новый подход к монотонизации разностных схем **211**

Цыпкин Г.Г. Течения в ненасыщенных пористых средах и капиллярные силы **213**

VI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Тезисы докладов

3 – 8 июля 2011 г.

Под редакцией д.ф.-м.н. И.Е. Егорова, д.ф.-м.н. В.И. Васильева
Оригинал-макет: Н.В. Неустроева, С.В. Потапова

Подписано в печать 23.06.2011. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 14,0. Тираж 170 экз. Заказ №202

Отпечатано с оригинал-макета в
ОАО «Медиа-холдинг Якутия»,
677000 г. Якутск, Вилюйский пер., 20